

MATHEMATIQUES

TES 2013-2014

Corrigés des devoirs

DS1 25/09/2013 page2

DV 08/10/2013 page 6

DS 13/11/2013 page 8

DV 28/11/2013 page 12

DS 18/12/2013 page 14

Bac Blanc 16/01/2014 page 19

DV 29/01/2014 page 23

DV 18/02/2014 page 25

DS 19/03/2014 page 27

DV 17/04/2014 page 31

DS 14/05/2014 page 32

EXERCICE I : (points)

La courbe ci-dessous représente une fonction f définie et dérivable sur $I = [2 ; 11]$. Elle est notée C_f .

La fonction dérivée de f est notée f' .

On précise que :

- La droite T est la tangente en A à C_f en son point d'abscisse 3.
- L'axe des abscisses est tangent à C_f en $S(5; 0)$.
- Le point $B(11 ; 3,6)$ est sur la courbe C_f .

1° Sans justification

1.a) Tableau de variations de la fonction f

x	2	5	11
$f'(x)$	–	0	+
$f(x)$	9	0	3,6

1.b) Tableau de signe de $f(x)$

x	2	5	11
$f(x)$	+	0	+

1.c) $f'(5) = 0$ car la fonction change de variations en $x=5$.

$f'(3) = -3$ (coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse -3).

1.d) L'ensemble des solutions de l'inéquation $f'(x) \leq 0$ est l'intervalle $[2 ; 5]$.

la fonction f est décroissante sur $[2 ; 5]$ ou d'après la ligne signe de $f'(x)$ du tableau de variation

1.e) L'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 5 est $y=0$ car en ce point la tangente est horizontale passant par le point de coordonnées $S(5 ; 0)$.

1.f) l'équation de la tangente T est $y = -3x + 11$

Méthode 1 : par lecture graphique du coefficient directeur et de l'ordonnée à l'origine. $T : y = -3x + 11$.

Méthode 2 : l'équation de la droite T est $y = f'(a) \times (x - a) + f(a)$ avec a abscisse du point en lequel la tangente est déterminée.

$$y = f'(3) \times (x - 3) + f(3) \qquad y = -3(x - 3) + 2 \qquad y = -3x + 11.$$

1.g) (0,5 point)

L'intervalle image de $[2 ; 5]$ est $[0 ; 9]$

Soit x appartenant à l'intervalle $[2 ; 5]$

Alors $2 \leq x \leq 5$ or f est décroissante sur $[2 ; 5]$

$$\text{Donc } f(5) \leq f(x) \leq f(2)$$

$$\text{Donc } 0 \leq f(x) \leq 9$$

L'intervalle image de $[2 ; 11]$ est $[0 ; 9]$

Le minimum de la fonction f sur $[2 ; 11]$ est 0 et le maximum de la fonction f sur $[2 ; 11]$ est 9

2.a) FAUX : la droite d'équation $y = 10$ ne coupe pas C_f .

2.b) FAUX : un réel n'a jamais plusieurs images par une fonction.

3.a) les solutions de l'équation $f(x) = 2$ sont les abscisses des points de C_f ayant une ordonnée égale à 2.
Les solutions sont 3 et 9

3.b) les solutions de l'inéquation $f(x) > 2$ sont les abscisses des points de C_f ayant une ordonnée supérieure à 2. L'ensemble des solutions est : $S = [2; 3[\cup]9; 11]$.

4. C'est la courbe C1 qui représente la dérivée. En effet, on a établi le signe de la dérivée à la question 1°a) ; ce qui permet de rejeter la courbe C2 qui représente une fonction positive sur $[2 ; 5]$, puis négative sur $[5 ; 11]$.

EXERCICE II : (points)

Une entreprise produit et vend des crayons.

Sa production journalière est comprise entre 1000 et 10000 crayons.

On désigne par q le nombre de milliers de crayons fabriqués chaque jour.

Le bénéfice journalier, exprimé en euros est donné par $B(q) = -q^3 + 9q^2 + 10$ pour $q \in [1 ; 10]$

1° Calculer $B(1)$. Interpréter pour l'entreprise.

$$B(1) = -1^3 + 9 \times 1^2 + 10 = 18$$

Le bénéfice de l'entreprise pour 1000 crayons par jour est 18 euros

2°a) Calculer $B'(q)$, puis étudier son signe.

$$B'(q) = -3q^2 + 18q = 3q(-q + 6)$$

Polynôme du second degré dont le coefficient de q^2 est -3

Racines

$$3q = 0 \Leftrightarrow q = 0 \text{ n'appartient pas à l'intervalle } [1 ; 10]$$

$$-q + 6 = 0 \Leftrightarrow q = 6$$

q	1	6	10
$B'(q)$	+	0	-

a) En déduire le sens de variation de la fonction B .

La fonction B est strictement croissante sur $[1 ; 6]$ et strictement décroissante sur $[6 ; 10]$

3° a) Dresser le tableau de variation de la fonction B

q	1	6	α	10
$B'(q)$	+	0	-	
$B(q)$	18	118	0	-90

b) En déduire le nombre de crayons à produire et vendre pour obtenir un bénéfice maximal.

Préciser ce bénéfice maximal.

Le bénéfice est maximal pour 6 milliers soit 6000 crayons et vaut 118 €

4° a) Montrer que l'équation $B(q) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[6 ; 10]$, on la note α .

- La fonction B est continue et strictement décroissante sur $[6 ; 10]$
- L'intervalle image de $[6 ; 10]$ est $[-90 ; 118]$
- $0 \in [-90 ; 118]$

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $B(q) = 0$ admet une unique solution dans $[6 ; 10]$.

b) Déterminer un encadrement de α d'amplitude 0,01.

q	$B(q)$
9,12	+0,019
α	0
9,13	-0,836

D'où : $9,12 \leq \alpha \leq 9,13$ est un encadrement de α à 0,01 près

c) Dresser le tableau de signe de $B(q)$ sur l'intervalle $[1 ; 10]$.

Du tableau de variations **complété avec α** , on déduit

q	1	9,12	α	9,13	10
$B(q)$		+	0	-	

d) En déduire le nombre de crayons que l'entreprise doit produire et vendre pour que le bénéfice soit positif. On donnera la réponse à 10 crayons près.

D'après les questions 4°abc, **le bénéfice est positif entre 1 milliers et 9,12 milliers de crayons produits et vendu par jour soit entre 1000 et 9120 crayons à 10 crayons près.**

Ex III : (7 points)

1° a) **Dérivée :** $U(x) = x - 10 + \frac{900}{x}$ pour $x \in [5 ; 100]$

Pour tout x de $[5 ; 100]$, on a :

$$U'(x) = 1 + 900 \times \frac{-1}{x^2} = 1 - \frac{900}{x^2} = \frac{x^2 - 900}{x^2} = \frac{(x - 30)(x + 30)}{x^2}$$

b) **Signe de la dérivée :**

x	5	30	100
$x - 30$	-	0	+
$x + 30$	+		+
x^2	+		+
$U'(x)$	-	0	+

Tableau de variation de la fonction U .

x	5	30	100
$U'(x)$	-	0	+
$U(x)$	175	50	99

$$U(5) = 175 \quad U(30) = 50 \quad U(100) = 99$$

d) **Coût unitaire minimum :** D'après son tableau de variation, la fonction U admet sur $[5 ; 100]$ un minimum égal à 50, obtenu pour $x = 30$.

le coût unitaire est minimal lorsqu'on produit 30 objets, ce coût unitaire minimum est 50 €.

Cela signifie que lorsqu'on fabrique 30 objets, le coût de fabrication pour 1 objet est de 50€.

2° La courbe de la fonction U représente le coût unitaire.

La recette unitaire est de 90 €. On trace la droite d'équation $y = 90$.

L'entreprise n'est pas déficitaire lorsque la recette unitaire est supérieure au coût unitaire, c'est-à-dire pour une production de 10 à 90 objets. En effet, la droite d'équation $y = 90$ est au-dessus ou au contact de la courbe de U sur $[10 ; 90]$.

3° a) **Coût total**

$U(x)$ désigne le coût unitaire, c'est-à-dire le coût pour 1 objet lorsqu'on en fabrique x ,

Coût total = nombre d'objets $\times$ coût d'1 objet

Le coût total $C_T(x)$ sera donné par :

$$C_T(x) = x \times U(x) = x \left(x - 10 + \frac{900}{x} \right) = x^2 - 10x + 900.$$

3° b) **Bénéfice total**

Recette totale en euros :

1 objet est vendu 90€, donc la recette totale est : $R(x) = 90 \times x = 90x$

Bénéfice total en euros

$$B(x) = R(x) - C_T(x) = 90x - (x^2 - 10x + 900) = -x^2 + 100x - 900$$

3° c) Entreprise bénéficiaire :

On résout dans $[5 ; 100]$ l'inéquation $B(x) \geq 0$

$$B(x) \geq 0 \Leftrightarrow -x^2 + 100x - 900 \geq 0 \quad \Delta = 100^2 - 4 \times (-1) \times (-900) = 6400 = 80^2$$

$B(x)$ admet deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-100-80}{-2} = 90 \quad x_2 = \frac{-100+80}{-2} = 10$$

x	5	10	90	100	
$B(x)$	—	0	+	0	—

Pour déterminer les productions bénéficiaires ou déficitaires : **on étudie le signe du bénéfice.**

$$B(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [10 ; 90]$$

L'entreprise réalise un bénéfice pour une production de 10 à 90 objets.

3° d) Variations de la fonction B. Pour tout x de $[5 ; 100]$, on a : $B'(x) = -2x + 100$

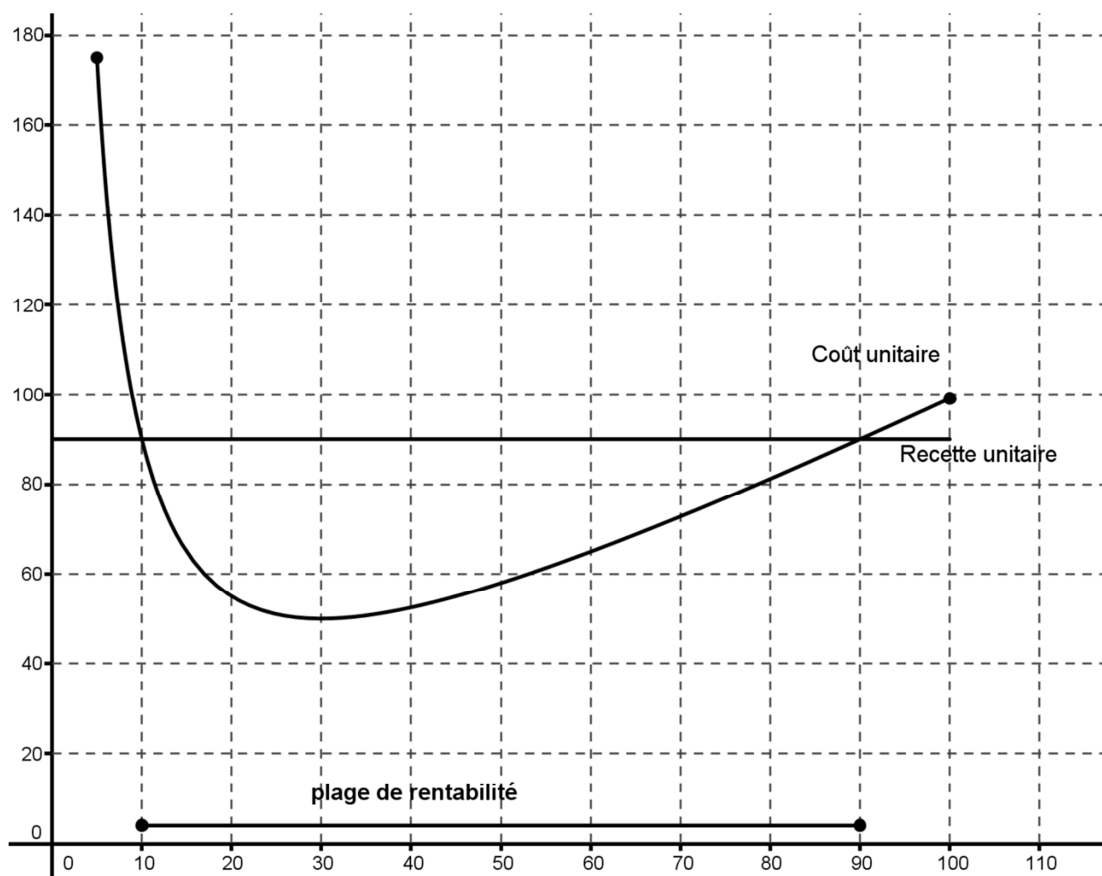
Racine : $-2x + 100 = 0 \Leftrightarrow x = 50$

x	5	50	100
$B'(x)$	+	0	-
$B(x)$	-425	1600	-900

Pour déterminer les productions qui rendent le bénéfice maximal : **on étudie les variations de la fonction bénéfice.**

D'après son tableau de variations, la fonction B admet sur $[5 ; 100]$ un maximum égal à 1600, obtenu pour $x = 50$.

Il faut donc produire 50 objets pour obtenir un bénéfice maximal de 1600€.



EXERCICE I : (7points)

On donne la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-3 ; 7]$

Par lecture graphique (sans justification)

1° Donner les valeurs suivantes :

On se place au point D d'abscisse 0

$$f(0) = 1 ; f'(0) = 0$$

On se place au point B d'abscisse 5

$$f(5) = 5 ; f'(5) = -\frac{8}{3}$$

Apprenez à lire le coefficient directeur !

2° Déterminer une équation de la tangente en D.

$$y = 1$$

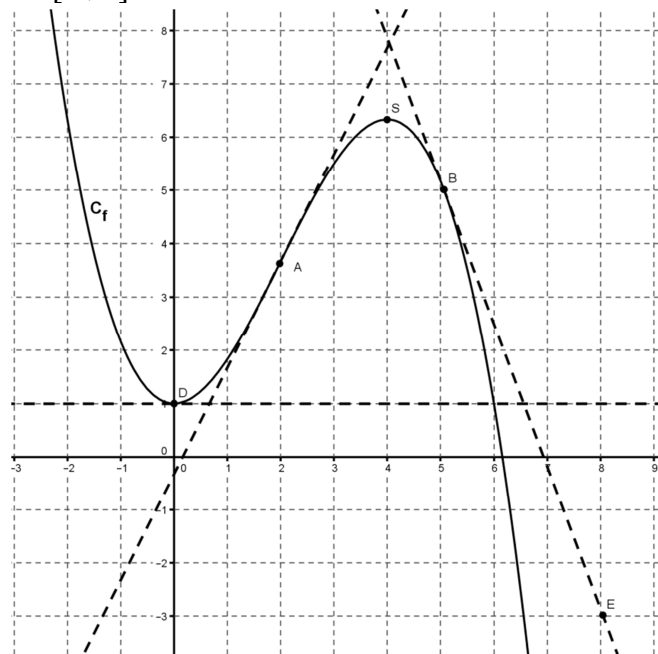
3° Déterminer une équation de la tangente en B.

$$y = f'(5) \cdot (x - 5) + f(5)$$

$$y = -\frac{8}{3}x + \frac{55}{3}$$

4° La courbe C_f est au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 2 sur $[-3 ; 2[$, puis en dessous sur $]2 ; 7]$

5° La fonction f est convexe sur $[-3 ; 2]$, et concave sur $[2 ; 7]$

**EXERCICE III : (8 points)**

On considère la fonction f définie sur $[0 ; 10]$ par $f(x) = x^3 - 15x^2 + 75x$.

1° Pour $x \in [0 ; 10]$

$$f'(x) = 3x^2 - 30x + 75 \quad f''(x) = 6x - 30.$$

2° Signe de $f''(x)$

x	0	5	10
$f''(x)$	-	0	+

On a $f''(x) \leq 0$ pour $x \in [0 ; 5]$, donc la fonction f est concave sur $[0 ; 5]$

On a $f''(x) \geq 0$ pour $x \in [5 ; 10]$, donc la fonction f est convexe sur $[5 ; 10]$.

3° Dresser le tableau de variations de la fonction f' .

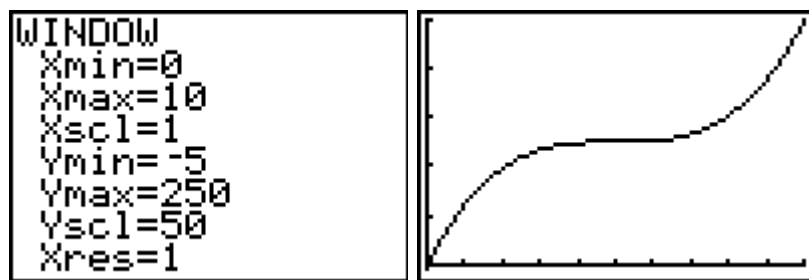
x	0	5	10
$f''(x)$	-	0	+
$f'(x)$	75	$\searrow 0 \nearrow$	75

Observez la « ligne » $f'(x)$:
elle permet de connaître le
signe de $f'(x)$!

4° Dresser le tableau de variations de la fonction f .

Le tableau de variations de la fonction f' permet de connaître le signe de $f'(x)$

x	0	5	10
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	0	$\nearrow 125$	$\nearrow 250$



EXERCICE II : (2 points)

Reporter sur votre copie la ou les affirmations vraies. *Aucune justification n'est demandée.*

Soit f une fonction définie, dérivable et convexe sur $[-5; 5]$

On peut affirmer : **(a) et (b)**

(a) la tangente à C_f au point d'abscisse 0 est située en dessous de C_f sur $[-5; 5]$

(b) C_f n'a pas de point d'inflexion.

(c) $f'(x)$ est positive sur $[-5; 5]$.

(d) f' change de signe sur $[-5; 5]$

EXERCICE IV : (3 points)

On considère la fonction f définie sur $[1; 10]$ par $f(x) = -x + 1 + \frac{1}{2x-1}$

En utilisant au mieux les informations **données** sur la copie d'écran ci-dessous, étudier la convexité de la fonction f .

Données : $f'(x) = \frac{-2}{(2x-1)^2} - 1$

$f''(x) = \frac{8}{(2x-1)^3}$

On étudie le signe de $f''(x)$:

Racine de $2x - 1$: $\frac{1}{2} \notin [1; 10]$

x	1	10
8	+	
$(2x-1)^3$	+	
$f''(x)$	+	

$(2x-1)^3$ a le même signe que $2x-1$

On a $f''(x) \geq 0$ pour $x \in [1; 10]$, donc la fonction f est convexe sur $[1; 10]$.

Quelques remarques :

- C'est la fonction f qui est convexe ou concave sur un intervalle (et non pas $f(x)$ ou C_f)
- Revoyez ce que signifie la position d'une courbe par rapport à une droite
- Apprenez à lire le coefficient directeur
- Commencez vos calculs de dérivées en précisant : pour $x \in \dots$

DEVOIR DE MATHEMATIQUES TES Bleue et Pervenche 13/11/2013 3 H

Corrigé

EXERCICE I : (5 points) 1° : 1.25 2° : 2,5 3° : 1,25

sujet national 2013 dévoilé

Un industriel étudie l'évolution de la production des jouets sur la machine VP1000 de son entreprise.

En 2000, lorsqu'il l'a achetée, elle pouvait produire 120 000 jouets par an.

Du fait de l'usure de la machine, la production diminue de 2% par an.

On modélise le nombre total de jouets fabriqués au cours de l'année $(2000 + n)$ par une suite (U_n) .

On a donc $U_0 = 120000$.

1. a. Montrer que la suite (U_n) est géométrique.

U_n est le nombre de jouets fabriqués en $2000 + n$

U_{n+1} est le nombre de jouets fabriqués en $2000 + n + 1$

Chaque année la production diminue de 2%,

$$U_n \times \left(1 - \frac{2}{100}\right) = U_{n+1}$$

Donc pour tout entier n , $U_{n+1} = U_n \left(1 - \frac{2}{100}\right) = 0,98U_n$

On en déduit que la suite (U_n) est géométrique de raison 0,98 et de 1^{er} terme $U_0 = 120000$

1.b. La suite (U_n) est géométrique de raison $q = 0,98$ et 1^{er} terme $U_0 = 120000$

donc $U_n = U_0 \times q^n$

$$U_n = 120000 \times 0,98^n$$

1. c. (U_n) une suite géométrique de raison $q = 0,98$ et 1^{er} terme $U_0 = 120000$

$U_0 > 0$ et $0 < q < 1$ **donc la suite (U_n) est décroissante**

2. a. Quel a été le nombre de jouets fabriqués en 2005 ?

2005 est l'année de rang 5 : $U_5 = 120000 \times 0,98^5 \approx 108470$

En 2005, l'entreprise a produit 108 470 jouets

2. b. Déterminer à partir de quelle année, le nombre de jouets fabriqués sera strictement inférieur à 100 000.

On recherche avec la table de la calculatrice

$$U_9 = 120000 \times 0,98^9 \approx 100\,050$$

$$U_{10} = 120000 \times 0,98^{10} \approx 98\,049$$

De plus la suite est décroissante,

Ainsi à partir de l'année de rang $n = 10$ donc de 2010, le nombre de jouets fabriqués sera strictement inférieur à 100 000.

2. c. Cet industriel décide qu'il changera la machine lorsqu'elle produira moins de 90 000 jouets par an.

Recopier et compléter les lignes 7 et 9 de l'algorithme ci-dessous afin qu'il permette de déterminer le plus petit entier naturel n tel que $U_n < 90000$.

Ligne 7 Tant que **$A \geq 90\,000$**

Ligne 9 A prend la valeur **$0,98 A$**

1	Variables : A est un réel
2	n est un entier naturel
3	
4	Initialisation : Affecter à A la valeur 120 000
5	Affecter à n la valeur 0
6	
7	Traitement : Tant que $A \geq 90\,000$
8	n prend la valeur $n + 1$
9	A prend la valeur $0,98 A$
10	Fin Tant que
11	
12	Sortie : Afficher n

3. a. Exprimer $1 + 0,98 + 0,98^2 + \dots + 0,98^n$ en fonction de n .

On reconnaît la somme $1 + q + q^2 + \dots + q^n$ de $n + 1$ termes.

On sait que (pour $q \neq 1$): $1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
D'où $0,98 + 0,98^2 + \dots + 0,98^n = \frac{1-0,98^{n+1}}{1-0,98} = \frac{1-0,98^{n+1}}{0,02} = \frac{1}{0,02}(1 - 0,98^{n+1})$
Donc $1 + 0,98 + 0,98^2 + \dots + 0,98^n = 50(1 - 0,98^{n+1})$

3. b. On pose $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$

On reconnaît la somme de $n + 1$ termes d'une suite géométrique de 1^{er} terme U_0 et de raison $q = 0,98$.

$$S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n = 1^{\text{er}} \text{ terme } \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = U_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$S_n = 120000 \frac{1 - 0,98^{n+1}}{0,02} = \frac{120000}{0,02} (1 - 0,98^{n+1}) = 6\,000\,000 \times (1 - 0,98^{n+1})$$

Donc $S_n = 6\,000\,000 \times (1 - 0,98^{n+1})$

3. c. En déduire le nombre total de jouets fabriqués pendant les 15 premières années de production.

On commence à 2000 : soit les années 2000, 2001, 2002, ... 2014

$$S_{14} = U_0 + U_1 + \dots + U_{14} = 6\,000\,000 \times (1 - 0,98^{15}) \approx 1\,568\,585$$

Pendant les 15 premières années, l'entreprise aura fabriqué au total 1 568 585 jouets.

EXERCICE II : (3 points) 1° 1,5 2° 1,5

La population d'une ville côtière augmente de 580 habitants chaque année.

En 2012, cette population est de 16000 habitants. On note p_n la population en 2012 + n .

1. On considère l'algorithme :

Détail des calculs : L'algorithme contient une « boucle pour » à répéter 5 fois

	initialisation	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$
P	16000	16580	17160	17740	18320	18900
n	0	1	2	3	4	5

Affichage En sortie, l'algorithme affiche $P = 18900$

Interprétation : Après 5 ans, en 2012+5=2017, la ville aura 18900 habitants

2. a. Justifier que $p_n = 16000 + 580n$

p_n est la population en 2012 + n

p_{n+1} est la population en 2012 + $n + 1$

Chaque année la population augmente de 580 habitants,

$$p_n \xrightarrow{+580} p_{n+1}$$

Donc pour tout entier n , $p_{n+1} = p_n + 580$

On en déduit que la suite (p_n) est arithmétique de raison $r = 580$ et de 1^{er} terme $p_0 = 16000$

Donc $p_n = p_0 + nr$

$$p_n = 16000 + 580n$$

2. b. Retrouver l'affichage obtenu à l'algorithme.

$$p_5 = 16000 + 580 \times 5 = 18900 \quad \text{On retrouve l'affichage.}$$

2. c. On résout

$$p_n > 22000 \Leftrightarrow 16000 + 580n > 22000 \Leftrightarrow n > \frac{6000}{580}$$

Or $\frac{6000}{580} \approx 10,34$. Ainsi, la population dépassera 22000 habitants à partir de l'année de rang 11, en 2023.

EXERCICE III : (8 points)

Dans le plan muni d'un repère orthogonal, on a tracé la courbe C_f représentative de la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[1 ; 8]$ ainsi que les tangentes à la courbe aux points $A(3,5 ; 104,75)$ et $B(6 ; 126)$.

La tangente en B à la courbe C_f passe par l'origine du repère.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f et f'' la dérivée seconde de la fonction.

PARTIE A : 1,75

À partir du graphique et des renseignements fournis on a :

1. $f'(3,5) = 0$ Coefficient directeur de la tangente à C_f en A d'abscisse 3,5 ; elle est horizontale

$f'(6) = \frac{126}{6} = 21$. Coefficient directeur de la tangente à C_f en B d'abscisse 6, cette tangente passe par O

2. $f''(3,5) = 0$. La courbe traverse sa tangente en A

La fonction f semble convexe sur $[3,5 ; 8]$, car la courbe est au-dessus de ses tangentes sur $[3,5 ; 8]$

et concave sur $[1 ; 3,5]$, car la courbe est en-dessous de ses tangentes sur $[1 ; 3,5]$

PARTIE B : 2,75

1. Pour tout x de $[1 ; 8]$

$$f'(x) = 3x^2 - 21x + 39 \text{ et } f''(x) = 6x - 21.$$

2. Pour $3x^2 - 21x + 39$, on a : $\Delta = -27 < 0$, donc le polynôme $3x^2 - 21x + 39$ n'a pas de racine. Donc f' est du signe de 3 soit strictement positif sur $[1 ; 8]$.

Ainsi, la fonction f est strictement croissante sur $[1 ; 8]$.

3. $f''(x) = 6x - 21$. Racine : $x = \frac{21}{6} = 3,5$

x	1	3,5	8
$f''(x)$	-	0	+

Ainsi, la fonction f est convexe sur $[3,5 ; 8]$ et concave sur $[1 ; 3,5]$.

4. le point A est un point d'inflexion pour la courbe C_f car en ce point la dérivée seconde de f s'annule en changeant de signe.

PARTIE C : 3+0,5

1.a. Dérivée : Pour $x \in [1 ; 8]$

$$C'_M(x) = 2x - 10,5 - 54 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x - 10,5 - \frac{54}{x^2} = \frac{2x^3 - 10,5x^2 - 54}{x^2}$$

$$\text{De plus, } (x-6)(2x^2 + 1,5x + 9) = 2x^3 + 1,5x^2 + 9x - 6x^2 - 9x - 54 = 2x^3 - 10,5x^2 - 54.$$

Donc pour tout x de l'intervalle $[1 ; 8]$:

$$C'_M(x) = \frac{(x-6)(2x^2 + 1,5x + 9)}{x^2}$$

1.b. Signe de $C'_M(x)$. Pour $2x^2 + 1,5x + 9$, $\Delta = -\frac{279}{4} < 0$ donc ce polynôme n'a pas de racine

x	1	6	8
$x-6$	-	0	+
$2x^2 + 1,5x + 9$	+		+
x^2	+		+
$C'_M(x)$	-	0	+

2. Tableau de variations de la fonction C_M sur $[1 ; 8]$

x	1	6	8
$C'_M(x)$	-	0	+
C_M	83,5	21	25,75

3. L'énoncé est améliorable :

On note $C_M(x)$ le coût moyen de production

Problème d'unités :

$C_M(6) = 21$ signifie que le coût moyen de production d'1 millier d'articles quand on en fabrique 6000 est de 21 000€,

21000€ pour 1millier d'articles : soit 21€ par article.

$C_M(1) = 83,5$ signifie que le coût moyen de production d'1 millier d'articles quand on en fabrique 1000 est de 83500€,

83500€ pour 1millier d'articles : soit 83,5€ par article.

Le prix de vente minimal d'un article pour que l'entreprise puisse espérer réaliser un bénéfice correspond sur l'intervalle $[1 ; 8]$ au cout moyen minium soit 21 euros, cela signifie qu'en-dessous de ce prix de vente unitaire, il est impossible qu'elle puisse réaliser un bénéfice.

Le prix de vente minimal d'un article pour que l'entreprise réalise un bénéfice quelle que soit sa production entre 1000 et 8000 objets, est de 83,5€ par article.

EXERCICE IV 1° : 0,5 2° : 1,5 3° : 2

1. Par lecture graphique :

1. a. Dresser le tableau de variation de la fonction f' .

x	-2,5	-2	-1	3
$f'(x)$	-3	0	1,4	0,25

1. b. Dresser le tableau de signe de $f'(x)$.

On regarde la position de la courbe $C_{f'}$ par rapport à l'axe des abscisses

x	-2,5	-2	3
$f'(x)$	-	0	+

2. Par lecture graphique :

2. a. $f'(x) = 0$ si et seulement si $x = -2$.

2. b. $f''(x) = 0$ si et seulement si $x = -1$.

2. c. $f''(0) = -\frac{1}{2}$. (Coefficient directeur de la droite T tangente à la courbe $C_{f'}$ au point d'abscisse 0.)

3. a. La courbe qui représente la fonction f est C_1 .

En effet, le signe de f' donne les variations de f , la fonction f est croissante sur $[-2,5 ; -2]$, puis décroissante sur $[-2 ; 3]$.

La courbe qui représente la fonction dérivée seconde f'' est C_2

En effet f' étant croissante sur $[-2,5 ; -1]$ et décroissante sur $[-1 ; 3]$, $f''(x)$ est positive sur $[-2,5 ; -1]$ et négative sur $[-1 ; 3]$ ce qui permet d'éliminer les courbes C_1 et C_4 ; de plus $f''(0) = -\frac{1}{2}$, ce qui permet d'éliminer C_3

3. b. Avec la question précédente, on a déterminé le signe de $f''(x)$, la fonction f est convexe sur $[-2,5 ; -1]$ et concave sur $[-1 ; 3]$.

3. c. La fonction f'' s'annule et change de signe en $x = -1$ donc la courbe C_f admet un point d'inflexion au point d'abscisse -1 .

Ex II

	Nombre d'adhérents souhaitant séjourner en Europe	Nombre d'adhérents souhaitant séjourner en Afrique	Nombre d'adhérents souhaitant séjourner en Amérique	
Nombre d'adhérents âgés de moins de 40 ans	21	9	33	63
Nombre d'adhérents âgés de plus de 40 ans	63	47	37	147
	84	56	70	210

Tous les adhérents ont la même probabilité d'être choisis : situation d'équiprobabilité

2. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

$$A : \text{« l'adhérent souhaite séjourner en Afrique »} \quad p(A) = \frac{56}{210} = \frac{4}{15}$$

$$B : \text{« l'adhérent est âgé de plus de 40 ans »} \quad p(B) = \frac{147}{210} = \frac{7}{10}$$

3. Calculer la probabilité de chacun des événements $A \cap B$ et $A \cup B$

$$p(A \cap B) = \frac{47}{210} \quad 47 \text{ personnes ont plus de 40 ans et souhaitent aller en Afrique}$$

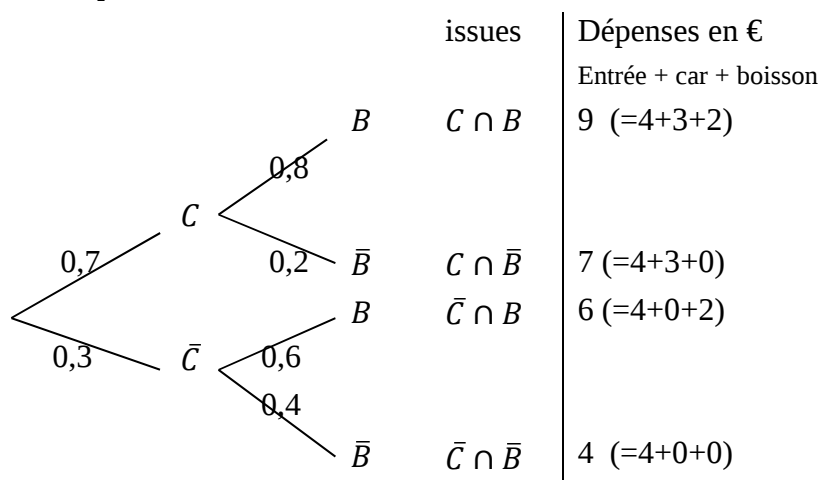
$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{56}{210} + \frac{147}{210} - \frac{47}{210} = \frac{156}{210} = \frac{26}{35}$$

4. Calculer la probabilité que l'adhérent souhaite se rendre en Afrique sachant qu'il est âgé de plus de 40 ans.

Parmi les 147 personnes âgées de plus de 40 ans (possibles), 47 souhaitent aller en Afrique (favorables), d'où (sans aucun calcul !)

$$p_B(A) = \frac{47}{147}$$

ExI 1° Arbre pondéré :



Données : $p(\bar{C}) = 0,3$ $p_C(B) = 0,8$ $p_{\bar{C}}(B) = 0,6$

Données déduites $p(C) = 0,7$ $p_C(\bar{B}) = 0,2$ $p_{\bar{C}}(\bar{B}) = 0,4$

2°a) « le touriste visite à pied et achète une boisson » $B \cap \bar{C}$

$$p(\bar{C} \cap B) = p(\bar{C}) \times p_{\bar{C}}(B) = 0,3 \times 0,6 = 0,18$$

La probabilité que le touriste visite à pied et achète une boisson est 0,18.

2° b) B est la réunion des événements $\bar{C} \cap B$ et $C \cap B$, de plus ces deux événements sont incompatibles donc

$$p(B) = p(\bar{C} \cap B) + p(C \cap B)$$

$$p(C \cap B) = p(C) \times p_B(C) = 0,7 \times 0,8 = 0,56$$

$$\text{et } p(\bar{C} \cap B) = 0,18$$

$$\text{D'où } p(B) = 0,18 + 0,56 = 0,74$$

3° « le touriste a visité à pied sachant qu'il a acheté une boisson » : C sachant B

$$p_B(\bar{C}) = \frac{p(\bar{C} \cap B)}{p(B)} = \frac{0,18}{0,74} \approx 0,24$$

Ainsi la probabilité que le touriste visite à pied, sachant qu'il a acheté une boisson est de 0,24 à 0,01 près

4.a. Les valeurs possibles de la dépense sont 9€, 7€, 6€ et 4€ selon la prestation choisie.

4.b. Loi de probabilité de la dépense d :

$$p(d = 9) = p(C \cap B) = 0,56$$

$$p(d = 7) = p(C \cap \bar{B}) = p(C) \times p_C(\bar{B}) = 0,7 \times 0,2 = 0,14$$

$$p(d = 6) = p(\bar{C} \cap B) = 0,18$$

$$p(d = 4) = p(\bar{C} \cap \bar{B}) = p(\bar{C}) \times p_{\bar{C}}(\bar{B}) = 0,3 \times (1 - 0,60) = 0,3 \times 0,4 = 0,12$$

D'où la loi de probabilité de la dépense d

d_i	9	7	6	4
$p(d = d_i)$	0,56	0,14	0,18	0,12

Total : 1

$$4. c. \text{Espérance} \quad E(d) = \sum_{i=1}^{i=4} p_i \times d_i = 0,56 \times 9 + 0,14 \times 7 + 0,18 \times 6 + 0,12 \times 4 = 7,58$$

L'espérance est de 7,58 €. Interprétation : on peut espérer une dépense moyenne par touriste de 7,58€

Ex I : (5.5 points)
 $1^\circ : 1 \quad 2^\circ : 0.5 \quad 3^\circ : 1 \quad 4^\circ : 0.5 \quad 5^\circ : 1.5 \quad 6^\circ : 1$
Amérique du Nord Juin 2010

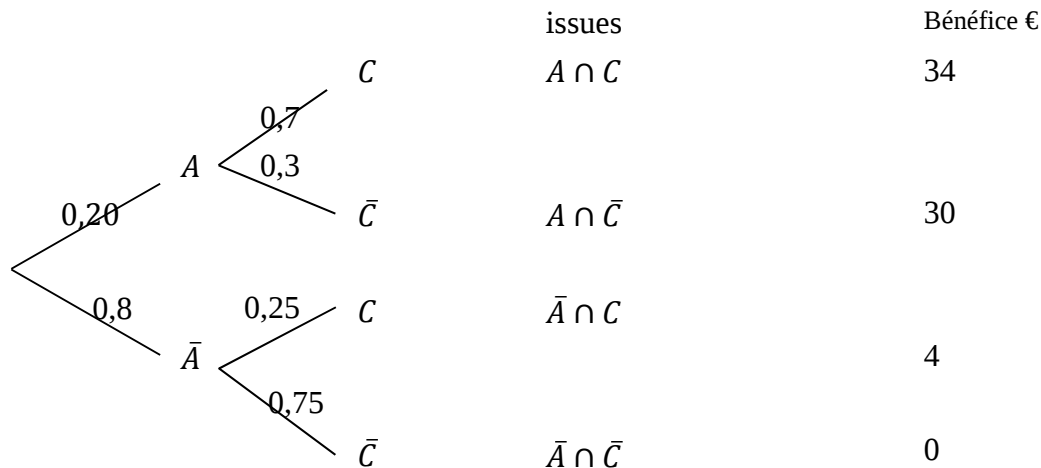
1.a. D'après les données

- $p(A) = 0,20$ donc $p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 0,8$
- 60% des clients n'achètent ni l'appareil photo ni la carte mémoire en promotion : $p(\bar{A} \cap \bar{C}) = 0,60$

1.b. « le client n'achète pas la carte, sachant qu'il n'a pas acheté l'appareil » : « $\bar{C}$ sachant $\bar{A}$ »

$$p_{\bar{A}}(\bar{C}) = \frac{p(\bar{A} \cap \bar{C})}{p(\bar{A})} = \frac{0,60}{0,80} = 0,75$$

2. arbre pondéré :


Données : $p(A) = 0,20$ $p_A(C) = 0,7$

Données déduites : $p(\bar{A}) = 0,80$ $p_A(\bar{C}) = 0,3$

D'après 1b $p_{\bar{A}}(\bar{C}) = 0,75$ donc $p_{\bar{A}}(C) = 0,25$

Donnée supplémentaire : $p(\bar{A} \cap \bar{C}) = 0,60$.

3. « le client achète la carte mémoire en promotion » : C
 C est la réunion de $A \cap C$ et $\bar{A} \cap C$ qui sont incompatibles ou $A \cap C$ et $\bar{A} \cap C$ forment une partition de C
Donc par la formule des probabilités totales

$$p(C) = p(A \cap C) + p(\bar{A} \cap C) = p(A) \times p_A(C) + p(\bar{A}) \times p_{\bar{A}}(C)$$

$$\text{Or } p(A \cap C) = p(A) \times p_A(C) = 0,2 \times 0,7 = 0,14$$

$$p(\bar{A} \cap C) = p(\bar{A}) \times p_{\bar{A}}(C) = 0,8 \times 0,25 = 0,2$$

$$\text{D'où } p(C) = 0,14 + 0,2 = 0,34$$

Ainsi la probabilité que le client achète la carte mémoire en promotion est égale à 0,34

4. " $A \cap \bar{C}$ "

$$p(A \cap \bar{C}) = p(A) \times p_A(\bar{C}) = 0,2 \times 0,3 = 0,06$$

La probabilité qu'un client achète l'appareil, mais n'achète pas la carte mémoire est égale à 0,06

5.a. Bénéfice : B

Bénéfice en €	0	4	30	34	
probabilité	0,60	0,20	0,06	0,14	Total = 1

5.b. Espérance du bénéfice :

$$E(B) = \sum_{i=1}^{i=4} p_i \times x_i = 0,60 \times 0 + 0,20 \times 4 + 0,06 \times 30 + 0,14 \times 34 = 7,36$$

Le commerçant peut espérer un bénéfice de 7,36 € par client,
donc un bénéfice de 736 € pour 100 clients.

6. On répète 3 fois de manière identique et indépendante une même épreuve.

Cette épreuve n'a que deux issues A : le client achète l'appareil photo en promotion de probabilité

$$p(A) = 0,20 \quad \text{et} \quad \bar{A} \text{ de probabilité } p(\bar{A}) = 0,80.$$

La variable aléatoire X qui désigne le nombre d'appareils photo en promotion suit donc une loi binomiale de paramètres 3 et 0,2

« au moins un des trois clients n'achète pas l'appareil en promotion » :

signifie que 0 ou 1 ou 2 clients achètent l'appareil photo en promotion c'est-à-dire $X \leq 2$

$$p(X \leq 2) = 1 - p(X = 3) = 1 - \binom{3}{3} \times 0,2^3 \times 0,8^0 = 1 - 1 \times 0,2^3 \times 1 = 1 - 0,2^3 = 0,992$$

Ainsi la probabilité qu'au moins un client parmi les 3, n'achètent pas l'appareil photo est 0,992.

EXERCICE III : (5 points) 1° 1.75 2° 0.75 3° : 0.75 4° : 1.25 5° 0.5

On considère la fonction f définie sur $[0 ; 3]$ par $f(x) = (2 - x) \cdot e^x + 3$

1° a. Dérivée Pour tout x de $[0 ; 3]$

$$f'(x) = -1 \times e^x + e^x(2 - x) + 0 = e^x(-1 + 2 - x) = e^x(1 - x)$$

1° b) Signe de la dérivée et variations :

x	0	1	3
e^x	+		+
$1 - x$	+	0	-
$f'(x)$	+	0	-

$e^x > 0$ sur $\mathbb{R}$

La fonction f est strictement croissante sur $[0 ; 1]$ et strictement décroissante sur $[1 ; 3]$

2° Tableau de variations

x	0	1	α	3
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$	5	$\nearrow e + 3$	$\searrow 0$	$\rightarrow 3 - e^3$

$$\text{Images : } f(0) = 2e^0 + 3 = 5 \quad f(1) = (2 - 1)e^1 + 3 = 3 + e \quad f(3) = (2 - 3)e^3 + 3 = 3 - e^3$$

3° Equation $f(x) = 0$

D'après son tableau de variations,

La fonction f est continue et strictement décroissante sur $[1 ; 3]$

L'intervalle image de $[1 ; 3]$ sur $[3 - e^3 ; e + 3]$

De plus $3 - e^3 \approx -17 < 0$ et $e + 3 \approx 5,7 > 0$ donc $0 \in [3 - e^3 ; e + 3]$

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $[1 ; 3]$, notée α .

4° a) algorithme

initialisation					
	1ere étape	2 ^{ème} étape	3 ^{ème} étape	4 ^{ème} étape	...
X = 2	X = 2,1	X = 2,2	X = 2,3	X = 2,4	...
Y = 3	Y = 2,18	Y = 1,195	Y = 0,00775	Y = - 1,409	...
Test « Y > 0 » vrai	vrai	vrai	vrai	Faux	

Valeurs affichées en sortie : 2,3 et 2,4

On peut en déduire $2,3 \leq \alpha \leq 2,4$ encadrement à 0,1 près

4°b) On obtient en sortie les nombres 2,30 et 2,31 pour la valeur **0,01 de P**

5° D'après le tableau de variations complété avec α unique solution de l'équation $f(x) = 0$

x	0	α	$+\infty$
f(x)	+	0	-

EXERCICE II : (5 points)

A : 1 B : 1° 1.25 2° 0.5 3° : 0.75 4° : 1.5

Partie A

1. $\frac{413}{524} \times 100 \approx 78,82$.

Le marché physique représente 78,82 % du marché total en 2011, arrondi à 0,01%

2. Taux d'évolution global du marché physique entre 2006 et 2011 :

$$T = \frac{413-1287}{1287} \times 100 \approx -67,91. \text{ Soit une baisse de } 67,91 \text{ \% à } 0,01 \text{ \% près.}$$

Partie B

1.a. $u_1 = u_0 \times \left(1 - \frac{20}{100}\right) = 413 \times 0,8 = 330,4$.

Ainsi le montant des ventes du marché physique en 2012 est de 330,4 millions d'euros.

1.b. Soit n entier naturel,

u_n est le montant des ventes du marché physique en 2011 + n.

u_{n+1} est le montant des ventes du marché physique en 2011 + n+1.

Celui-ci baisse chaque année de 20 % donc $u_{n+1} = \left(1 - \frac{20}{100}\right) u_n = 0,8 u_n$, pour tout entier naturel n.

Ainsi la suite (u_n) est géométrique de raison $q = 0,8$ et de premier terme $u_0 = 413$.

1.c. la suite (u_n) est géométrique de raison 0,8 et de premier terme $u_0 = 413$ donc pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 \times q^n = 413 \times 0,8^n$.

2. Formule en C3 : **=413*0,8^B3** ou bien **=C2*0,8**

3. $2020 = 2011 + n \Leftrightarrow n = 9$. et $u_9 = 413 \times 0,8^9 \approx 55$.

Si la tendance reste la même le marché physique en 2020 sera d'environ 55 millions d'euros.

4.a. on a : $u_n = 413 \times 0,8^n$.

La suite (u_n) est géométrique de raison 0,8, or $0 < 0,8 < 1$ donc la suite $(0,8^n)$ est décroissante.

Comme $413 > 0$ la suite (u_n) est donc décroissante.

4.b. La suite (u_n) étant décroissante, on prévoit un marché inférieur à 50 millions d'euros à partir du plus petit rang pour lequel $u_n \leq 50$.

A l'aide de la calculatrice : $u_9 \approx 55 > 50$ et $u_{10} \approx 44 < 50$.

Ceci est donc vrai à partir du rang 10 soit en 2021.

EXERCICE IV : (5 points) A : 1,5 B : 1° 2.5 2° 0.5**Partie A : Lecture graphique**

1. Les volumes hebdomadaires nécessaires pour que le bénéfice hebdomadaire soit égal à 400 euros sont les abscisses des points de la courbe dont l'ordonnée est égale à 400.
Le volume hebdomadaire est donc égal à 400 euros pour environ 3,1 litres et 15,2 litres de vaccins produits
2. Les volumes hebdomadaires produits pour que le laboratoire soit bénéficiaire sont les abscisses des points de la courbe du bénéfice B dont l'ordonnée est supérieure (ou égale ?) à zéro.
Le laboratoire est donc bénéficiaire entre 1 litre et 16,3 litres de vaccin.

Partie B : Étude du bénéfice hebdomadaire

On admet que B est la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0 ; 17]$ par :

$$B(x) = -x^3 + 6x^2 + 180x - 184.$$

On notera B' la fonction dérivée de la fonction B .

1. a. Déterminer pour tout x appartenant à l'intervalle $[0 ; 17]$, l'expression de $B'(x)$.

Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0 ; 17]$

$$B'(x) = -3x^2 + 12x + 180$$

- b. Vérifier que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0 ; 17]$,

$$B'(x) = (-3x + 30)(x + 6).$$

Développons le membre de droite :

Pour tout x appartenant à l'intervalle $[0 ; 17]$,

$$(-3x + 30)(x + 6) = -3x^2 - 18x + 30x + 180 = -3x^2 + 12x + 180$$

On retrouve $B'(x)$ trouvé en a)

Donc l'égalité est prouvée :

Pour tout x appartenant à l'intervalle $[0 ; 17]$, $B'(x) = (-3x + 30)(x + 6)$.

- c. Étudier le signe de $B'(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[0 ; 17]$.

Racines

$$-3x + 30 = 0 \Leftrightarrow -3x = -30 \Leftrightarrow x = 10$$

$$x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -6 \text{ cette racine n'appartient pas à l'intervalle } [0 ; 17]$$

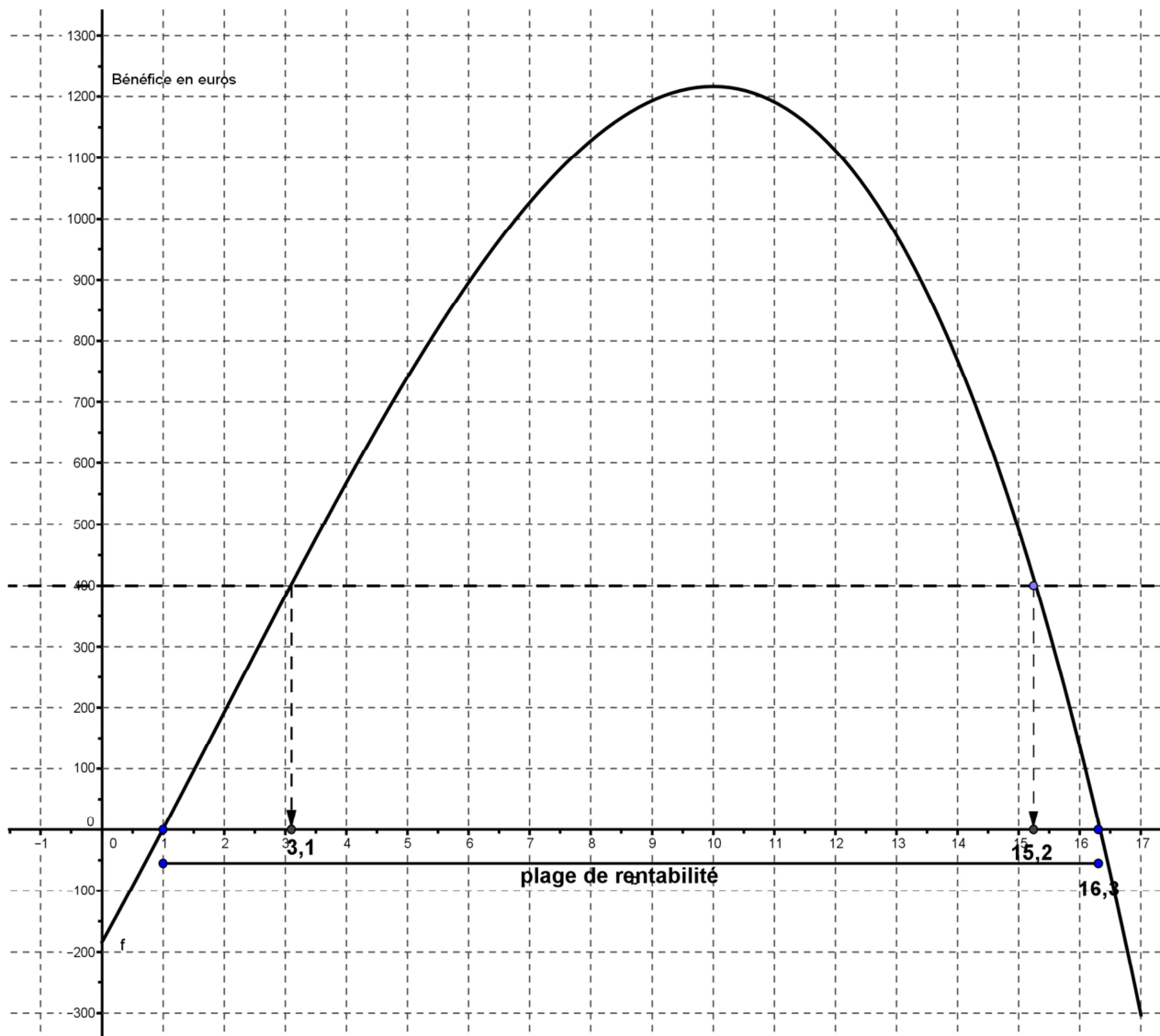
Tableau de signe

x	0	10	17
$-3x + 30$	—	—	—
$x + 6$	—	0	+
$B'(x)$	+	0	—

- d. En déduire le tableau de variations de la fonction B sur l'intervalle $[0 ; 17]$.

x	0	10	17
$B'(x)$		+	—
$B(x)$	-184	1216	-303

2. D'après le tableau de variation le bénéfice a pour maximum 1216 atteint en $x = 10$.
Donc il faut produire 10 litres de vaccin pour que le bénéfice soit maximal, et ce bénéfice sera de 1216€



EXERCICE I : (5.5 points)

On considère f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-x} + 1$

On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé du plan.

1. a. Montrer que, pour tout réel x , $f'(x) = e^{-x}(1 - x)$

$$(uv)' = u'v + v'u$$

$$u(x) = x \text{ donc } u'(x) = 1$$

$$v(x) = e^{-x} \text{ donc } v'(x) = -e^{-x}$$

$$\text{Donc pour tout réel } x, f'(x) = 1e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1 - x)$$

b. En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Racine et signe de $f'(x)$: $1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
e^{-x}	+	+	+
$1 - x$	+	0	-
$f'(x)$	+	0	-

$e^u > 0$ sur $\mathbb{R}$

Donc f est strictement croissante sur $]-\infty; 1]$ et f est strictement décroissante sur $[1; +\infty[$

x	$-\infty$	-1	α	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+			0	-
f						

Tableau non exigible vu les questions

2. a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[-1; 0]$.

* f est continue sur $[-1; 0]$.

* f est strictement croissante sur $[-1; 0]$.

* l'intervalle image de $[-1; 0]$ est $[f(-1); f(0)]$

$$\text{or } f(-1) = -1e + 1 = -e + 1 \approx -1,7 \text{ et } f(0) = 0 + 1 = 1$$

Donc $0 \in [f(-1); f(0)]$.

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires,

l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[-1; 0]$.

b. Donner un encadrement de α à 10^{-1} près.

A l'aide de la calculatrice

x	$f(x)$
-0,6	-0,0933
α	0
-0,5	+0,175

On en déduit l'encadrement : $-0,6 \leq \alpha \leq -0,5$ à $0,1$ près

3. Montrer que l'équation réduite de la tangente T à C_f au point d'abscisse 0 est $y = x + 1$

T a pour équation $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

$$f'(0) = e^{-0}(1) = 1 \text{ et } f(0) = 1$$

Donc **T a pour équation $y = x + 1$**

4. L'objectif de cette question est de déterminer la position relative de C_f par rapport à T .

À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on a obtenu, pour tout réel x , l'expression et le signe de $f''(x)$ où f'' désigne la dérivée seconde de f .

	Instruction	Réponse
1	$f(x) = x \times \exp(-x) + 1$	$xe^{-x} + 1$
2	$f''(x) = \text{dérivée seconde}[f(x)]$	$e^{-x}(x - 2)$
3	$\text{résoudre}[e^{-x}(x - 2)] \geq 0$	$x \geq 2$

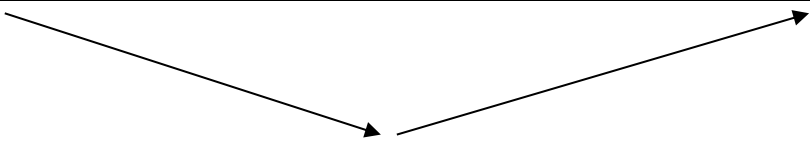
a. Déterminer le sens de variation de la dérivée f' de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Le sens de variation de la dérivée f' est déduit du signe de la dérivée seconde

D'après le logiciel de calcul formel, $f''(x) = e^{-x}(x - 2)$

Et d'après la dernière ligne du calcul formel, $e^{-x}(x - 2) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$

On peut donc compléter le signe de la dérivée seconde et déduire le sens de variation de f'

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	—	0	+
Sens de variation de la dérivée f'			
convexité	f est concave		f est convexe

La dérivée f' est strictement croissante sur $]-\infty; 2]$ et f est strictement décroissante sur $[2; +\infty[$

b. Déterminer l'intervalle de $\mathbb{R}$ sur lequel la fonction est convexe, puis celui sur lequel elle est concave.

La convexité se déduit du signe de $f''(x)$

f est concave sur $]-\infty; 2]$

f est convexe sur $[2; +\infty[$

c. En déduire la position relative de C_f par rapport à T sur l'intervalle $]-\infty; 2]$.

La courbe d'une fonction concave est située en-dessous de ses tangentes.

f est concave sur $]-\infty; 2]$ et T est la tangente à la courbe au point d'abscisse 0

Donc la courbe C_f est en particulier située en-dessous de sa tangente T .

EXERCICE II : (5 points) NON SPECIALITE

PARTIE 1

1.	K	U	S
	initialisation	100	100
	2	140	240
	3	180	420
Les deux	4	220	640

valeurs affichées à la fin sont $U=220$ et $S=640$. Ainsi la construction d'un puits de 4 mètres est de 640 € et le

coût du quatrième mètre est de 220€.

2.a. Chaque mètre supplémentaire coûte 40€ de plus donc, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n + 40$.

La suite (u_n) est donc arithmétique de raison 40 et de premier terme $u_1 = 100$.

2.b. Avec 2.a. $u_n = u_1 + (n - 1)r = 100 + 40(n - 1)$. Donc.

$$u_{10} = 100 + 40 \times 9 = 460.$$

2.c. Le coût total pour un puits de 10 mètres de profondeur est de :

$$C = u_1 + \dots + u_{10} = \frac{10}{2}(u_1 + u_{10}) = 5(100 + 460) = 2800. \text{ Ainsi } \mathbf{10 \text{ mètres coutent donc } 2800 \text{ €.}}$$

PARTIE 2

$$1. v_2 = v_1 \times 1,35 = 60 \times 1,35 = 81$$

2. Chaque mètre supplémentaire creusé occasionne une augmentation de 35 % de la subvention.

Donc pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = v_n \times 1,35$. Ainsi (v_n) est une suite géométrique de raison 1,35 et de premier terme $v_1=60$.

$$3. \text{ Ainsi } v_n = v_1 \times q^{n-1} = 60 \times 1,35^{n-1}.$$

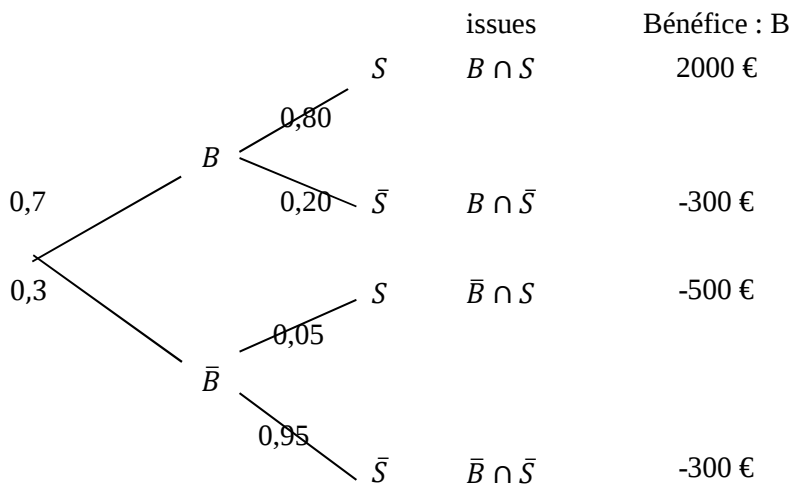
$$4. \text{ Pour un puits de 10 mètres le montant de la subvention est de } v_{10} = v_1 \times 1,35^9 \approx 894.$$

Soit un montant de la subvention de 894€ pour un puits de 10 mètres.

5. Pour un forage de 10 mètres le coût est de u_{10} et le montant de la subvention est de v_{10} soit un prix de revient de $u_{10} - v_{10} \approx 1906 \text{ €}$.

EXERCICE III : (5.5 points)

1. Construire un arbre de probabilités correspondant à cette situation.



Données : $p(B) = 0,7$ $p_B(S) = 0,80$ $p_{\bar{B}}(S) = \frac{5}{100} = 0,05$

Données déduites : $p(\bar{B}) = 0,3$ $p_B(\bar{S}) = 0,20$ $p_{\bar{B}}(\bar{S}) = 0,95$

2. Déterminer la probabilité $p(B \cap S)$ qu'il y ait un banc de poissons sur la zone et que le sonar le détecte.

$$p(B \cap S) = p(B) \times p_B(S) = 0,7 \times 0,8 = 0,56$$

la probabilité qu'il y ait un banc de poissons sur la zone et que le sonar le détecte est de 0,56.

3. Montrer que la probabilité que le sonar indique la présence d'un banc de poissons (réel ou fictif) est 0,575.

Sest la réunion des événements $B \cap S$ et $\bar{B} \cap S$ qui sont incompatibles,

$$p(S) = p(B \cap S) + p(\bar{B} \cap S)$$

$$\text{Or } p(\bar{B} \cap S) = p(\bar{B}) \times p_{\bar{B}}(S) = 0,3 \times 0,05 = 0,015$$

$$\text{D'où } p(S) = 0,56 + 0,015 = 0,575$$

Ainsi la probabilité que le sonar indique la présence d'un banc de poissons (réel ou fictif) est 0,575.

4. Lors d'une sortie en mer, le pêcheur se trouve toujours dans l'une des trois situations suivantes :

4.a. Reproduire et compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité du «gain» (positif ou négatif) réalisé.

Gain : x_i	2 000	- 500	- 300
Probabilité : p_i	0,56	0,015	0,425

Soit G le gain du pêcheur.

$$p(G = 2000) = p(B \cap S) = 0,56$$

$$p(G = -300) = p(\bar{S}) = 1 - p(S) = 1 - 0,575 = 0,425$$

$$p(G = -500) = p(\bar{B} \cap S) = 0,015$$

4.b. Le pêcheur effectue de nombreuses sorties. Quel gain par sortie peut-il espérer avoir ?

Espérance de gain :

$$E(G) = \sum_{i=1}^{i=3} x_i \times p_i = 0,56 \times 2000 + 0,015 \times (-500) + 0,425 \times (-300) = 985$$

Le pêcheur peut espérer un gain de 985 € par sortie.

5° a) On répète 10 fois de manière identique et **indépendante** une même épreuve qui n'a que deux issues

S le sonar indique un banc réel ou fictif de probabilité 0,575

$\bar{S}$ le sonar reste muet de probabilité 0,425.

La variable aléatoire X qui donne le nombre de sorties pour lesquels le sonar indique un banc (réel ou fictif), suit une loi binomiale de paramètres 10 et 0,575

5° b) « pour exactement 4 sorties, le sonar indique un banc (réel ou fictif) » : ($X = 4$)

$$p(X = 4) = \binom{10}{4} \times 0,575^4 \times 0,425^6 = 210 \times 0,575^4 \times 0,425^6 \approx 0,135$$

Ainsi, la probabilité que, pour exactement 4 sorties, le sonar indique un banc (réel ou fictif) est de 0,135 arrondie au millième de ce résultat.

EXERCICE IV : (4 points)

1.a. Le nombre de solutions de l'équation $f(x)=1$ est de 2 notées x_1 et x_2 :

$$-2 < x_1 < -1,75 \text{ et } 1 < x_2 < 1,25.$$

1.b. $f'(-1) = 0$.

1.c. f' s'annule pour $x = -1$.

f' est positive sur $[-2 ; -1[$ et négative sur $] -1 ; 4]$.

2.a. $f'(0)$ est le coefficient directeur de (T) soit -1.

2.b. la fonction f' est représentée par la courbe C_3 car f' est positive sur $[-2 ; -1[$ et négative sur $] -1 ; 4]$ et $f'(0)$ est le coefficient directeur de (T) soit -1.

TESB 29/01/2014

Dans un village, l'association de gymnastique volontaire possédait 50 adhérents en 2008.

Depuis cette date, la trésorière a remarqué que chaque année elle reçoit 18 nouvelles adhésions et 15 % des anciens inscrits ne renouvellent pas leur adhésion.

On note a_n le nombre d'adhérents pour l'année 2008 + n ; on a donc $a_0 = 50$.

1° 2° Pour tout n :

nombre d'adhérents en (2008 + n) : a_n

nombre d'adhérents en (2008 + $n + 1$) : a_{n+1}

 -15% et +18 adhérents par an

$$\text{on a } a_{n+1} = a_n \times \left(1 - \frac{15}{100}\right) + 18$$

$$\text{c'est-à-dire : } a_{n+1} = 0,85a_n + 18$$

2° Soit la suite (u_n) définie par $u_n = a_n - 120$ pour tout $n \geq 0$.

a) Pour tout n

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= a_{n+1} - 120 \\ &= (0,85a_n + 18) - 120 \\ &= 0,85a_n - 102 \\ &= 0,85 \left(a_n - \frac{102}{0,85} \right) \\ &= 0,85(a_n - 120) \\ &= 0,85 u_n \end{aligned}$$

$$\text{On a : } u_{n+1} = 0,85 u_n$$

On en déduit que la suite (u_n) est géométrique de raison 0,85

Son 1^{er} terme est $u_0 = 50 - 120 = -70$.

b) Exprimer u_n , puis a_n en fonction de n .

La suite (u_n) est géométrique de raison 0,85, donc $u_n = u_0 \times 0,85^n = -70 \times 0,85^n$

On a : $u_n = a_n - 120$ donc $a_n = u_n + 120$

D'où, pour tout entier naturel n , $a_n = 120 - 70 \times 0,85^n$.

c) Déterminer le nombre d'adhérents en 2014. On donnera la valeur approchée par défaut.

204 est l'année de rang 6 : $u_6 = 120 - 70 \times 0,85^6 \approx 93$.

On peut prévoir 93 adhérents en 2014. (valeur par défaut)

d) Déterminer la limite de la suite (a_n) quand n tend vers l'infini, interpréter ce résultat.

$$0 < 0,85 < 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} 0,85^n = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} -70 \times 0,85^n = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} (120 - 70 \times 0,85^n) = 120$$

$$\text{D'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 120$$

A très long terme, l'association comportera 120 adhérents.

3° a) Pour tout entier naturel n , on a :

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= (120 - 70 \times 0,85^{n+1}) - (120 - 70 \times 0,85^n) \\ &= -70 \times 0,85^n \times 0,85 + 70 \times 0,85^n \\ &= 70 \times 0,85^n (-0,85 + 1) \\ &= 0,15 \times 70 \times 0,85^n \\ &= 10,5 \times 0,85^n \end{aligned}$$

b) En déduire le sens de variation de la suite (a_n) .
 $0,85 > 0$ donc $0,85^n \times 10,5 > 0$ (produit de nombres positifs)
 donc $a_{n+1} - a_n > 0$, donc $a_{n+1} > a_n$
 Donc la suite (a_n) est croissante.

c) Déterminer à partir de quelle année, l'association aura au moins 100 adhérents.
 La suite (a_n) est croissante ;
 $a_7 \approx 97 < 100$ et $a_8 \approx 100,9 > 100$
 Donc c'est à partir de l'année de rang 8, en 2016 que l'association aura au moins 100 adhérents

4° On veut estimer le montant des cotisations reçues de 2008 à 2014.

a) A l'aide d'un tableau Excel, on veut déterminer le nombre total de cotisations reçues durant cette période.

Initialisation dans les cellules A2 B2 C2 : on donne les valeurs initiales

Formules de calcul dans les cellules A3 B3 C3 et C12.

les formules commencent par « = »

les formules des cellules A3 ,B3, C3 seront étirées vers le bas, jusqu'à la ligne 8 , pour avoir l'année 2014

	A	B	C
1	année	n	a_n
2	2008	0	50
3	=A2+1	=B2+1	=C2*0,85+18
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12		total :	=SOMME(C2:C8)

On obtient un total de 520 cotisations reçues.

b) On admet que la cotisation moyenne est de 80€ par an.

Le montant des cotisations reçues de 2008 à 2014 est de 41 600€. En effet : $S = 520 \times 80 = 41\,600$

5° Chaque semaine 60% des adhérents s'inscrivent pour 1h de gymnastique et 40% pour 2h de gymnastique.

a) Nombre N d'heures de gymnastique à prévoir par semaine pour l'année 2008 + n est

$$\begin{aligned}
 N &= 0,60 \times a_n \times 1 + 0,40 \times a_n \times 2 \\
 &= 0,6a_n + 0,8 a_n \\
 &= 1,4(120 - 70 \times 0,85^n) \\
 &= 168 - 98 \times 0,85^n
 \end{aligned}$$

b) Une séance de gymnastique dure une heure et est limitée à 20 personnes. On veut déterminer à partir de quelle année l'association devra prévoir plus de 8 séances par semaine.

L'association devra augmenter le nombre de séances lorsque plus de 160 heures seront nécessaires

On résout $N > 160$

$$N > 160 \Leftrightarrow 168 - 98 \times 0,85^n > 160 \Leftrightarrow -98 \times 0,85^n > -8 \Leftrightarrow 98 \times 0,85^n < 8$$

A la calculatrice, le plus petit entier n solution de cette inéquation est 16 :

$$98 \times 0,85^{15} \approx 8,56 > 8 \text{ et } 98 \times 0,85^{16} \approx 7,27 < 8$$

C'est à partir de l'année de rang 16, en 2024 que l'association devra augmenter le nombre de séances.

On considère la fonction f est définie sur $\left[\frac{1}{2}; 5\right]$, par : $f(x) = 1 - x + 2 \ln x$.

1° Dérivée :

pour tout x de $\left[\frac{1}{2}; 5\right]$, $f'(x) = -1 + 2 \times \frac{1}{x} = -1 + \frac{2}{x} = \frac{-x+2}{x}$

Signe de la dérivée :

x	$\frac{1}{2}$	2	5
$-x + 2$	+	0	-
x	+		+
$f'(x)$	+	0	-

2° Tableau de variation de f :

x	$\frac{1}{2}$	1	2	3	α	4	5
$f'(x)$		+	0	-			
$f(x)$			$-1 + 2\ln 2$				
		$-1 + 2\ln 2$				$-4 + 2\ln 5$	

$$f(2) = 1 - 2 + 2\ln 2 = -1 + 2\ln 2$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2} + 2 \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - 2 \ln 2 \approx -0,89$$

$$f(5) = 1 - 5 + 2 \ln 5 = -4 + 2 \ln 5 \approx -0,78$$

$$3^\circ \text{a) } f(1) = 1 - 1 + \ln 1 = 0$$

3° b) d'après son tableau de variation,

la fonction f est **continue** et **strictement décroissante** sur $[3; 4]$,

$$f([3; 4]) = [f(4); f(3)] \quad \bullet^*$$

de plus $0 \in [f(4); f(3)]$ car $f(3) \approx +0,19$ et $f(4) \approx -0,2274$

donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $[3; 4]$

x	$f(x)$
3,51	+0,001
α	0
3,52	-0,003

3,51 est une valeur approchée à 0,01 près par défaut de α .

3° c) D'après le tableau de variations complété avec α et 1, on a :

x	$\frac{1}{2}$	1	α	5
$f(x)$	-	0	+	-

4° On appelle g la fonction définie sur $\left[\frac{1}{2}; 5\right]$ par : $g(x) = x \cdot \left(-\frac{1}{2}x + 2 \ln x - 1\right)$

4°a) pour tout x de $\left[\frac{1}{2}; 5\right]$, on a :

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 \times \left(-\frac{1}{2}x + 2 \ln x - 1\right) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{2}{x}\right) \times x \\ &= -\frac{1}{2}x + 2 \ln x - 1 - \frac{1}{2}x + 2 \\ &= 1 - x + 2 \ln x \end{aligned}$$

On constate que $g'(x) = f(x)$ pour $x \in \left[\frac{1}{2}; 5\right]$.

4° b) d'après la question 3c, on connaît le signe de $f(x)$, donc c'est aussi le signe de $g'(x)$, on en déduit que la fonction g est décroissante sur $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$, croissante sur $[1; \alpha]$, et décroissante sur $[\alpha; 5]$.

Ex II : 1° On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x \cdot \ln x - x$

$$f(e) = e \cdot \ln e - e = e \times 1 - e = e - e = 0$$

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \cdot \ln\left(\frac{1}{e}\right) - \frac{1}{e} = \frac{1}{e}(-\ln e) - \frac{1}{e} = -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} = -\frac{2}{e}$$

$\ln e = 1$

$$f(\sqrt{e}) = \sqrt{e} \times \ln \sqrt{e} - \sqrt{e} = \sqrt{e} \times \frac{1}{2} \ln e - \sqrt{e} = \frac{1}{2} \sqrt{e} - \sqrt{e} = -\frac{1}{2} \sqrt{e}$$

2° En résolvant l'inéquation, déterminer le plus petit entier n tel que :

$$625 \times 1,04^n - 325 \geq 575.$$

$$625 \times 1,04^n - 325 \geq 575$$

$$\Leftrightarrow 625 \times 1,04^n \geq 575 + 325$$

$$\Leftrightarrow 625 \times 1,04^n \geq 900$$

$$\Leftrightarrow 1,04^n \geq \frac{900}{625}$$

$$\Leftrightarrow 1,04^n \geq 1,44$$

$$\Leftrightarrow e^{n \times \ln 1,04} \geq 1,44$$

$$\Leftrightarrow n \times \ln 1,04 \geq \ln 1,44$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 1,44}{\ln 1,04} \quad \text{car } \ln 1,04 \text{ positif}$$

$$\text{De plus } \frac{\ln 1,44}{\ln 1,04} \approx 9,30$$

Ainsi le plus petit entier n solution est 10

Ex I A : 4 pts B : 1 pt

Partie A La courbe (C), donnée ci-contre, est la représentation graphique de la fonction f définie sur $[1 ; 7]$ par $f(x) = -x^2 + 10x - 9 - 8 \ln x$

1° Dérivée : pour tout x de $[1 ; 7]$

$$f'(x) = -2x + 10 - 8 \times \frac{1}{x} = \frac{-2x^2 + 10x - 8}{x}$$

$$\text{De plus : } -2(x-1)(x-4) = -2(x^2 - x - 4x + 4) = -2x^2 + 10x - 8$$

$$\text{Donc } f'(x) = \frac{-2(x-1)(x-4)}{x}$$

2° Signe de la dérivée

x	1	4	7
-2	—	—	—
$x-1$	0	+	+
$x-4$	—	0	+
x	+	+	+
$f'(x)$	0	+	0

Racines :

1
4
0

3° Tableau de variation de la fonction f

x	1	4	α	7
$f'(x)$	0	+	0	—
$f(x)$	0	$f(4)$	0	$f(7)$

Images :

$$f(1) = -1^2 + 10 - 9 - 8 \ln 1 = 0$$

$$f(4) = -4^2 + 10 \times 4 - 9 + 8 \ln 4 = 15 - 8 \ln 4$$

$$f(4) \approx 3,9096$$

$$f(7) = -7^2 + 10 \times 7 - 9 - 8 \ln 7 = 12 - 8 \ln 7$$

$$f(7) \approx -3,567$$

4° a) La fonction f est continue et strictement **décroissante** sur $[4 ; 7]$

L'intervalle image de $[4 ; 7]$ est $[f(7); f(4)]$

avec $f(7) \approx -3,567 < 0$ et $f(4) \approx 3,9096 > 0$

Ainsi $0 \in [f(7); f(4)]$

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation

$f(x) = 0$ admet une unique solution dans $[4 ; 7]$, on la note α

4° b) Table de valeurs arrondies à 10^{-4}

x	6,18	6,19	6,20	6,21
$f(x)$	0,0371	0,0004	-0,0364	-0,0734

4° c) on en déduit : $6,19 \leq \alpha \leq 6,20$

Partie B - Application économique

Une entreprise doit produire entre 10 et 70 pièces par jour.

On admet que si x est la production journalière **en dizaines de pièces** alors le bénéfice réalisé **en milliers d'euros** est $f(x)$, où f est la fonction étudiée dans la première partie avec $x \in [1 ; 7]$.

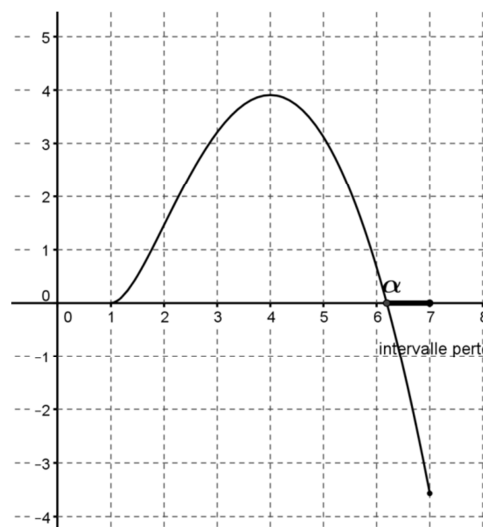
1° D'après le tableau de variation ou la courbe, on déduit le tableau de signe de $f(x)$

x	1	α	7
$f(x)$	0	+	0

Ainsi $f(x) < 0$ pour $x > \alpha$

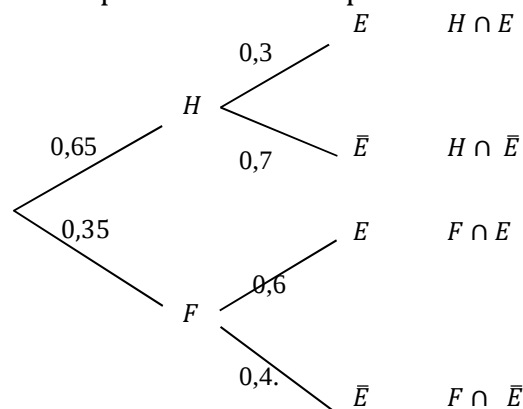
or $6,19 \leq \alpha \leq 6,20$ et $f(6,2) < 0$; comme x est en dizaines de pièces, on en déduit que c'est à partir de 62 pièces que l'entreprise travaille à perte.

2° le maximum de la fonction f sur $[1 ; 7]$ est $f(4) \approx 3,9096$, ainsi, l'entreprise doit fabriquer et vendre 40 objets pour réaliser un bénéfice maximal de 3910€ à 1€ près.



Ex II A : 3 pts B : 2 pts Sujet national septembre 2013

1. L'arbre de probabilité correspondant aux données du problème est



2. a) L'événement est «la personne choisie écoute les explications du démarcheur et est une femme.».

D'après les propriétés de l'arbre pondéré :

$$p(E \cap F) = p(F) \times p_F(E) = 0,35 \times 0,6 = 0,21.$$

2.b) La probabilité que la personne choisie écoute les explications du démarcheur est $P(E)$.

E est la réunion des événements $E \cap H$ et $E \cap F$ qui sont incompatibles,

D'après la formule des probabilités totales :

$$p(E) = p(E \cap H) + p(E \cap F).$$

$$\text{Or } p(E \cap H) = p(H) \times p_H(E) = 0,65 \times 0,3 = 0,195$$

$$\text{D'où : } p(E) = 0,195 + 0,21 = 0,405$$

2.c) Le démarcheur s'adresse à une personne qui l'écoute;

$$\text{La probabilité que ce soit un homme est } P_E(H) = \frac{P(E \cap H)}{P(E)} = \frac{0,195}{0,405} \approx 0,48.$$

Partie B

On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de souscriptions réalisées par un employé donné un jour donné.

1. Les relevés réalisés au cours des premières journées permettent de constater que 12% des personnes interrogées souscrivent à ce nouveau forfait, donc la probabilité qu'une personne interrogée souscrive un nouveau forfait est 0,12.

Chaque employé de l'opérateur effectue 60 appels par jour.

On suppose le fichier suffisamment important pour que les choix soient considérés réalisés de façon indépendante et dans des conditions identiques.

La variable aléatoire X qui comptabilise le nombre de souscriptions réalisées par un employé donné un jour donné suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 60$ et $p = 0,12$.

2. La probabilité que l'employé obtienne 5 souscriptions est $P(X = 5)$.

Pour une variable aléatoire X suivant la loi $B(n, p)$ on sait que : $p(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1 - p)^{n-k}$

$$p(X = 5) = \binom{60}{5} \times 0,12^5 \times 0,88^{60-5} \approx 0,12.$$

3. La probabilité que l'employé obtienne au moins une souscription un jour donné est : $P(X \geq 1)$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{60}{0} \times 0,12^0 \times 0,88^{60} = 1 - 0,88^{60} \approx 0,9995.$$

Ex III Partie A : (2pts)

1° Calculer les intégrales suivantes. On donnera la valeur exacte.

$$I = \int_1^2 (3x^2 - 4x + 1)dx = \left[3\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + x \right]_1^2 = [x^3 - 2x^2 + x]_1^2 = (8 - 8 + 2) - (1 - 2 + 1) = 2$$

$$J = \int_1^e \left(\frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \left[3 \ln(x) - \frac{-1}{x} \right]_1^e = \left[3 \ln(x) + \frac{1}{x} \right]_1^e = 3 \ln(e) + \frac{1}{e} - 3 \left(\ln(1) + \frac{1}{1} \right) = 2 + \frac{1}{e}$$

Partie B : (3pts)

Cette partie est un questionnaire à choix multiple. Pour chacune des questions, retrouver l'affirmation exacte. Sur votre copie, vous recopierez la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse inexacte enlève 0,5 point. L'absence de réponse n'est pas pénalisée.

2° L'ensemble de solution de l'inéquation $1 - 2 \ln x \geq 0$ est : **(b)** $]0 ; \sqrt{e}]$

Pour $x \in]0 ; +\infty[$:

$$1 - 2 \ln x \geq 0 \Leftrightarrow -2 \ln x \geq -1 \Leftrightarrow \ln x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \leq e^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x \leq \sqrt{e}$$

Désormais, on considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = x \cdot \ln(x)$

3° La fonction dérivée f' de f est définie sur $]0 ; +\infty[$ par : **(c)** $f'(x) = 1 + \ln(x)$

4° Une fonction primitive F de f est définie sur $]0 ; +\infty[$ par : **(b)** $F(x) = \frac{1}{4}x^2(2 \ln(x) - 1)$

On calcule $F'(x) = \dots = x \cdot \ln x$

EXERCICE IV : (5 points) Nouvelle Calédonie novembre 2013

Première partie 1.25 pt

1. Intérêts en 2014 en euros : $6000 \times \frac{2,25}{100}$ soit 135€

D'où le 1^{er} janvier 2015 en euros : $6000 + 135 + 900$ soit 7035€

Monica disposera de 7035 € le 1^{er} janvier 2015

2. On note M_n le montant en euros disponible sur le livret le premier janvier de l'année 2014 + n .

On a donc $M_0 = 6000$ et $M_1 = 7035$.

Montrer que pour tout entier naturel n : $M_{n+1} = 1,0225 M_n + 900$.

M_n est le montant en euros disponible sur le livret le premier janvier de l'année 2014 + n

M_{n+1} est le montant en euros disponible sur le livret le premier janvier de l'année suivante 2014 + $n + 1$

Le taux de rémunération du livret reste fixé à 2,25% par an

et Monica verse 900 euros chaque 1^{er} janvier à partir de 2015

$$\text{donc } M_{n+1} = \left(1 + \frac{2,25}{100}\right) M_n + 900 \text{ soit } M_{n+1} = 1,0225 M_n + 900$$

Deuxième partie 1a-b : 1.75pts 1c : 1pt 2 : 1pt

Monica souhaite savoir en quelle année le montant de son livret atteindra le plafond de 19 125 euros.

1. Première méthode : On considère la suite (G_n) définie pour tout entier naturel n , par $G_n = M_n + 40 000$.

1.a On sait que pour tout entier naturel n

$$G_n = M_n + 40 000 \quad \text{donc } M_n = G_n - 40 000$$

$$G_{n+1} = M_{n+1} + 40 000$$

$$= 1,0225 M_n + 900 + 40000$$

$$= 1,0225 M_n + 40900$$

$$= 1,0225 \left(M_n + \frac{40900}{1,0225} \right)$$

$$= 1,0225(M_n + 40000)$$

$$G_{n+1} = 1,0225 G_n$$

Ainsi, pour tout n de $\mathbb{N}$, $G_{n+1} = 1,0225 G_n$ donc la suite (G_n) est géométrique de raison 1,0225

et de 1^{er} terme : $G_0 = M_0 + 40000 = 46 000$

1.b. La suite (G_n) étant géométrique de raison 1,0225, $G_n = G_0 \times 1,0225^n$
donc $G_n = 46000 \times 1,0225^n$

Pour tout entier naturel n $M_n = G_n - 40\,000$
donc $M_n = 46\,000 \times 1,0225^n - 40\,000$

1.c On cherche le plus petit entier n tel que $M_n \geq 19125$

$$M_n \geq 19125 \Leftrightarrow 46\,000 \times 1,0225^n - 40\,000 \geq 19125$$

$$\Leftrightarrow 46\,000 \times 1,0225^n \geq 59125$$

$$\Leftrightarrow 1,0225^n \geq \frac{59125}{46000}$$

$$\Leftrightarrow \ln(1,0225^n) \geq \ln\left(\frac{59125}{46000}\right) \text{ puisque la fonction } \ln \text{ est strictement croissante sur }]0; +\infty[$$

$$\Leftrightarrow n \times \ln 1,0225 \geq \ln\left(\frac{59125}{46000}\right)$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln\left(\frac{59125}{46000}\right)}{\ln 1,0225} \text{ puisque } \ln 1,0225 > 0$$

$$\text{or } \frac{\ln\left(\frac{59125}{46000}\right)}{\ln 1,0225} \approx 11,3$$

Donc le plafond sera atteint à partir de $n = 12$ soit en 2026

2. Deuxième méthode :

L'algorithme ci-dessous permet de déterminer l'année à partir de laquelle le plafond sera atteint.

Ligne		
1	Variables :	MONTANT est un réel
2		ANNÉE est un entier
3		
4	Initialisation :	Affecter à MONTANT la valeur 6 000
5		Affecter à ANNÉE la valeur 2014
6		
7	Traitement :	Tant que MONTANT < 19125
8		Affecter à MONTANT la valeur 1,022 5 ×MONTANT +900
9		Affecter à ANNÉE la valeur ANNÉE +1
10		
11	Sortie :	Afficher « Le plafond du livret sera atteint en ... »
12		Afficher ANNÉE

a. Il suffit de modifier deux lignes de cet algorithme pour qu'il détermine l'année à partir de laquelle le plafond est atteint pour un montant versé initialement de 5 000 euros et des versements annuels de 1 000 euros.

On doit modifier les lignes 4 et 8 et les remplacer par

Ligne 4 : Affecter à MONTANT la valeur 5 000

Ligne 8 : Affecter à MONTANT la valeur 1,022 5 ×MONTANT +1000

b. Il faut ajouter une dernière ligne dans la boucle « tant que », après la ligne 9, ou après la ligne 10, pour que le montant intermédiaire s'affiche à chaque étape :

Ligne		
1	Variables :	MONTANT est un réel
2		ANNÉE est un entier
3		
4	Initialisation :	Affecter à MONTANT la valeur 6 000
5		Affecter à ANNÉE la valeur 2014
6		
7	Traitement :	Tant que MONTANT < 19125
8		Affecter à MONTANT la valeur 1,022 5 ×MONTANT +900
9		Affecter à ANNÉE la valeur ANNÉE +1
10		Afficher MONTANT
11	Sortie :	Afficher « Le plafond du livret sera atteint en ... »
12		Afficher ANNÉE

EXERCICE I : (9 points) Les résultats seront arrondis au centième pour les probabilités et à l'entier pour les poids de naissance donnés en grammes.

On note X la variable aléatoire qui, à un enfant choisi au hasard dans une maternité, associe son poids de naissance. On admet que X suit la loi normale d'espérance 3 300 et d'écart type 600.

On choisit un enfant au hasard dans cette maternité.

1° La variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance 3 300, donc le poids moyen d'un enfant à la naissance est de 3300 g

2° $p(2700 \leq X \leq 3900) \approx 0,68$

Ainsi, la probabilité qu'un enfant ait un poids de naissance compris entre 2 700 g et 3 900 g est 0,68

3° $p(X < 2100) = 0,5 - p(2100 < X \leq 3300) \approx 0,02$

La probabilité qu'un enfant ait un poids de naissance inférieure à 2 100 g est 0,02

4° $p(X > 3000) = 0,5 + p(3000 < X \leq 3300) \approx 0,69$

La probabilité qu'un enfant ait un poids de naissance supérieure à 3000 g est 0,69

5° a) Equivalence :

$$3300 - h \leq X \leq 3300 + h \Leftrightarrow -h \leq X - 3300 \leq h \Leftrightarrow \frac{-h}{600} \leq \frac{X - 3300}{600} \leq \frac{h}{600} \Leftrightarrow -\frac{h}{600} \leq Y \leq \frac{h}{600}$$

b) X suit la loi normale $\mathcal{N}(3300; 600^2)$ donc la variable aléatoire $Y = \frac{X-3300}{600}$ suit la loi $\mathcal{N}(0; 1)$

$$P(3300 - h \leq X \leq 3300 + h) = 0,95 \Leftrightarrow p\left(-\frac{h}{600} \leq Y \leq \frac{h}{600}\right) = 0,95$$

Pour une loi $\mathcal{N}(0; 1)$, on a : $p(-1,96 \leq Y \leq 1,96)$ d'où $1,96 = \frac{h}{600}$ donc $h = 1,96 \times 600 = 1176$

EXERCICE II : (6 points)

On considère les fonctions f et F définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x \cdot e^{-x+2}$ et $F(x) = (-x-1)e^{-x+2}$

1° On dérive F :

Pour tout x de $\mathbb{R}$ $F(x) = (-x-1)e^{-x+2}$

$$u(x) = -x-1 \quad u'(x) = -1$$

$$v(x) = e^{-x+2} \quad v'(x) = -e^{-x+2}$$

On applique : $(u \times v)' = u' \cdot v + v' \cdot u$

$$F'(x) = -1 \times e^{-x+2} + (-e^{-x+2}) \times (-x-1) = e^{-x+2}(-1+x+1) = xe^{-x+2} = f(x)$$

On a $F'(x) = f(x)$, donc la fonction F est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2° Sachant que F est une primitive de f :

$$I = \int_2^4 f(x) dx = F(4) - F(2) = (-5e^{-2}) - (-3e^0) = 3 - 5e^{-2}$$

3° En déduire la valeur moyenne de la fonction f sur $[2; 4]$

$$V_m = \frac{1}{4-2} \int_2^4 f(x) dx = \frac{1}{2} \times I = \frac{1}{2} (3 - 5e^{-2}) = \frac{3}{2} - \frac{5}{2}e^{-2} \approx 1,16$$

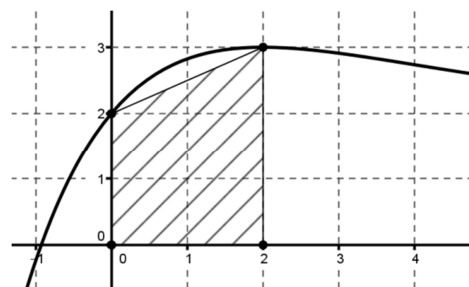
EXERCICE III : (5 points)

1° On considère la partie du plan délimitée par les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$, l'axe des abscisses et la courbe C représentée.

Le meilleur encadrement est $5 \leq \mathcal{A} \leq 6$

Le trapèze hachuré a une aire de $5 u. a.$

La partie du plan décrite est contenue dans un rectangle de largeur 2, de hauteur 3, donc $6 u. a.$



2° Calculer les intégrales suivantes. On donnera la valeur exacte, puis la valeur arrondie à 0,01 près

$$I = \int_0^1 (e^{2x} - x) dx = \left[\frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 = \left(\frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} e^0 - 0 \right) = \frac{1}{2} e^2 - 1 \approx 2,69$$

$$J = \int_1^3 \left(\frac{1}{2} x^2 + 2x + \frac{1}{x} \right) dx = \left[\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} x^3 + 2 \times \frac{1}{2} x^2 + \ln(x) \right]_1^3 = \left(\frac{1}{6} \times 3^3 + 3^2 + \ln 3 \right) - \left(\frac{1}{6} + 1 + 0 \right) = \frac{37}{3} + \ln 3 \approx 13,43$$

Lorsque vous obtenez l'intégrale à la calculatrice, dites-le !

ExI : (4 points) A 1° : 0,5 + 0,75 2° 0,75 + 0,5 B : 0,75 + 0,75 Amérique du Sud Novembre 2013

Partie A

1.a. Comme 30% des clients ont déclaré un sinistre au cours de l'année, la probabilité qu'un client déclare un sinistre est 0,3. Choisir au hasard et de manière aléatoire 15 clients, revient à extraire 15 noms avec remise et de manière indépendante.

Donc la variable aléatoire X qui compte le nombre de clients ayant déclaré un sinistre au cours de l'année suit la loi binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = 0,3$.

1.b. L'événement ($X \geq 1$) est l'événement contraire de ($X = 0$)

donc $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$

$$P(X = 0) = \binom{15}{0} \times 0,3^0 \times 0,7^{15} = 0,7^{15} \approx 0,005$$

donc **$P(X \geq 1) \approx 1 - 0,005 \approx 0,995$.**

2. a. $n = 100$ et $p = 0,3$,

$n = 100$, $n \times p = 30$ et $n \times (1 - p) = 70$

donc les conditions suivantes sont vérifiées : $n \geq 30$ $n \times p \geq 5$ $n(1 - p) \geq 5$

Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la variable aléatoire fréquence est donné

par : $I_n = \left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$

$$p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0,2101$$

$$p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0,3898$$

$I_{100} \approx [0,210 ; 0,390]$.

2.b. L'expert constate que 19 clients ont déclaré un sinistre au cours de l'année, ce qui fait une fréquence de $\frac{19}{100} = 0,19$.

Or 0,19 n'appartient pas à I_{100} donc, au seuil de 95%, on peut dire que l'affirmation du cabinet d'assurance, « 30% des clients ont déclaré un sinistre au cours de l'année », ne peut pas être validée par l'expert.

Partie B

1. Dans cette question, on cherche $P(1000 \leq Y \leq 1500)$;

la calculatrice donne $P(1000 \leq Y \leq 1500) = \text{normalFRep}(1000,1500,1200,200) \approx 0,775$, résultat arrondi à 10^{-3} .

La probabilité qu'un sinistre de faible gravité ait un coût compris entre 1000 € et 1500 € est d'environ 0,775.

2. Dans cette question, on cherche $P(Y > 1000)$

$P(Y > 1000) = 0,5 + P(1000 < Y \leq 1200) \approx 0,841$

$$\text{normalFRep}(1000,1200,1200,200) \approx 0,341.$$

Donc la probabilité qu'un sinistre de faible gravité ait un coût supérieur à 1000€ est d'environ 0,841

EXERCICE II : (5 points) NON SPECIALITE A : 0,5+0,5 B 1° 0,75 2° 1 3° : 1 C : 1,25

Partie A

Polynésie septembre 2013

On saisit en entrée le nombre $S = 81\,200\,000$. Recopier et compléter le tableau suivant autant que nécessaire en arrondissant les résultats à l'unité. Quel nombre obtient-on en sortie ?

U	81 751 602	81 571 748	81 392 290	81 213 227	81 034 558
N	0	1	2	3	4
Test $U > S$	vrai	vrai	vrai	vrai	faux

En sortie on obtient **4 (valeur de N)**

Partie B

On note u_n l'effectif de la population de l'Allemagne au premier janvier 2011 + n .

1. Déterminer u_0 et u_1

$u_0 = 81\,751\,602$ effectif de la population de l'Allemagne en 2011

u_1 est l'effectif de l'Allemagne en 2012 qui d'après l'énoncé a baissé de 0,22% par rapport à 2011

$$u_1 = 81\,751\,602 \left(1 - \frac{0,22}{100}\right) = 81\,751\,602 \times 0,9978 \approx 81\,571\,748$$

$$u_1 = 81\,571\,748$$

2. a. Justifier que la suite (u_n) est une suite géométrique, de 1er terme 81 751 602 et de raison 0,997 8.

u_n est l'effectif de la population de l'Allemagne au premier janvier 2011 + n

u_{n+1} est l'effectif de la population de l'Allemagne au premier janvier 2011 + $n + 1$

et on considère qu'à partir de 2011, le taux d'évolution de la population allemande est -0,22% par an

$$\text{donc } u_{n+1} = \left(1 - \frac{0,22}{100}\right) u_n = 0,9978 u_n \text{ pour tout entier naturel } n$$

donc la suite (u_n) est une suite géométrique, de 1er terme $u_0 = 81\,751\,602$ et de raison 0,997 8.

2. b. Exprimer u_n en fonction de n .

(u_n) est une suite géométrique, de 1er terme u_0 et raison q donc $u_n = u_0 q^n$

$$\text{Donc } u_n = 81\,751\,602 \times 0,9978^n$$

3. Si cette évolution de -0,22% se confirme

3. a. Effectif de la population de l'Allemagne au premier janvier 2035 :

$$2035 = 2011 + 24 \text{ donc l'effectif est } u_{24} = 81\,751\,602 \times 0,9978^{24} \approx 77\,542\,583$$

Donc l'effectif de la population de l'Allemagne sera de 77 542 583 si l'évolution se confirme.

3. b. En quelle année la population passera-t-elle au-dessous du seuil de 81 200 000 habitants ?

D'après l'algorithme de la partie A, u_n devient inférieur à 81 200 000 à partir de $n = 4$

Donc la population passera au-dessous du seuil de 81 200 000 habitants en 2015.

Partie C

1. Modéliser cette situation à l'aide d'une suite (v_n) dont on précisera le premier terme v_0 ainsi qu'une relation entre v_{n+1} et v_n

Pour cette situation qui tient compte des flux migratoires positifs de 49800 par an :

v_n est l'effectif de la population de l'Allemagne au premier janvier 2011 + n

v_{n+1} est l'effectif de la population de l'Allemagne au premier janvier 2011 + $n + 1$

$$\text{Ainsi, } v_{n+1} = 0,9978 \times v_n + 49\,800$$

2. Calculer v_1 et v_2 .

En 2011, la population est 81 751 602 : $u_0 = v_0 = 81\,751\,602$

v_1 est la population en 2012

$$v_1 = 0,9978 \times 81\,751\,602 + 49\,800 \approx 81\,621\,548$$

$$v_2 = 0,9978 \times 81\,621\,548 + 49\,800 \approx 81\,491\,781$$

Que peut-on conjecturer sur l'évolution de la population de l'Allemagne ?

On remarque que $v_2 < v_1 < v_0$

Malgré les flux migratoires, on peut conjecturer que la population de l'Allemagne continue à diminuer

EXERCICE III : (5 points) Métropole Septembre 2013

1. réponse c. f est convexe sur l'intervalle $]1 ; 3[$.

Justification : La courbe est au-dessus de ses tangentes sur $]1 ; 3[$.

2. réponse d. La tangente à C_f au point d'abscisse 1 a pour équation $y = -3x + 5$.

Justification : On a : $f(1) = 2$ et $f'(1) = -3$ (coefficient directeur de la tangente à C_f au point $A(1 ; 2)$)
 $y = f'(1) \times (x - 1) + f(1) \Leftrightarrow y = -3(x - 1) + 2 \Leftrightarrow y = -3x + 5$

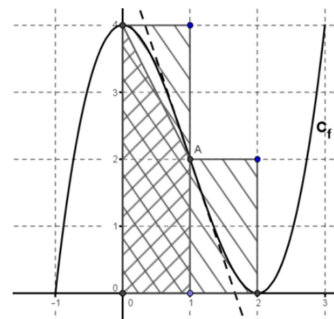
3. réponse b. f' est croissante sur l'intervalle $]1 ; 2[$.

Justification : D'après la q1, la fonction f est convexe sur $]1 ; 3[$, donc sur $]1 ; 2[$;
on en déduit $f''(x) \geq 0$ sur $]1 ; 2[$, donc la fonction f' est croissante sur $]1 ; 2[$

4. réponse b. $3 < \int_0^2 f(x)dx < 6$

Justification : la fonction f est continue et positive sur $[0 ; 2]$,
donc l'intégrale est l'aire entre la courbe C_f et l'axe des abscisses
sur l'intervalle $[0 ; 2]$.

On peut mettre un polygone trapèze à l'intérieur d'aire 3 u. a.
De plus cet ensemble de points est contenu dans un hexagone
d'aire 6 u. a.



5. réponse b. F est croissante sur l'intervalle $] -1 ; 2[$.

Justification : F est une primitive de f , donc $F' = f$

Les variations de la fonction f dépendent du signe de sa dérivée, or $f(x) > 0$ sur $] -1 ; 2[$, donc F est croissante sur $] -1 ; 2[$

EXERCICE IV : (6 points) A : $1^\circ 2^\circ : 1,25$ B $1^\circ 0,5^\circ 2^\circ 1,75^\circ 3^\circ : 0,5$ Pondichéry 2014

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment

Production : entre 0 et 300 litres par semaine. Cette production est vendue dans sa totalité.

Le coût total de fabrication est modélisé par la fonction f définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $I =]0 ; 3]$
par $f(x) = 10x^2 - 20x \ln x$

Lorsque x représente le nombre de centaines de litres de sorbet, $f(x)$ est le coût total de fabrication en centaines d'euros.

La recette, en centaines d'euros, est donnée par une fonction r définie sur le même intervalle I .

Partie A

1. Par lecture graphique et sans justification :

a. La recette est représentée par la droite D dont le point d'abscisse 1 a pour ordonnée 10.

1 représente 100 litres et 10 représentent 1000 euros

donc la vente de 100 litres de sorbet rapporte 1000 euros

b. Donner l'expression de $r(x)$ en fonction de x .

La droite D passe par l'origine et son coefficient directeur est égal à $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{10}{1} = 10$

Donc $r(x) = 10x$

c. Combien l'artisan doit-il produire au minimum de litres de sorbet pour que l'entreprise dégage un bénéfice ?

Pour que l'entreprise dégage un bénéfice, il faut que la droite D représentant la recette soit au-dessus de la courbe C représentant le coût c'est-à-dire que $x > 1$.

L'artisan doit produire au moins 100 litres de sorbet pour que l'entreprise dégage un bénéfice

2. On admet que $\int_1^3 20x \ln x \, dx = 90 \ln 3 - 40$

a. En déduire la valeur de $\int_1^3 f(x)dx$

$$\int_1^3 f(x)dx = \int_1^3 (10x^2 - 20x \ln x)dx = \int_1^3 10x^2 dx - \int_1^3 20x \ln x \, dx$$

L'énoncé donne la valeur de la 2^{ème} intégrale, calculons la 1^{ère}

$$\int_1^3 10x^2 dx = \left[10 \frac{1}{3} x^3 \right]_1^3 = \left[\frac{10}{3} x^3 \right]_1^3 = \frac{10}{3} (3^3 - 1^3) = \frac{10}{3} 26 = \frac{260}{3}$$

Donc

$$\int_1^3 f(x) dx = \frac{260}{3} - (90 \ln 3 - 40) = \frac{260}{3} - 90 \ln 3 + \frac{120}{3} = \frac{380}{3} - 90 \ln 3$$

$$\int_1^3 f(x) dx = \frac{380}{3} - 90 \ln 3$$

b. En déduire, pour une production comprise entre 100 et 300 litres, la valeur moyenne (arrondie à l'euro) du coût total de production.

On calcule la valeur moyenne de la fonction f entre 1 et 3 :

$$\frac{1}{3-1} \int_1^3 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_1^3 f(x) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{380}{3} - 90 \ln 3 \right) = \frac{190}{3} - 45 \ln 3 \approx 13,896$$

exprimée en centaines d'euros comme $f(x)$

Donc pour une production comprise entre 100 et 300 litres, la valeur moyenne du coût total de production est égale à 1389,6 euros soit 1390 euros à 1 euro près.

Partie B

On note $B(x)$ le bénéfice réalisé par l'artisan pour la vente de x centaines de litres de sorbet produits.

D'après les données précédentes, pour tout x de l'intervalle $[1 ; 3]$, on a $B(x) = -10x^2 + 10x + 20x \cdot \ln x$ où $B(x)$ est exprimé en centaines d'euros.

1. On note B' la fonction dérivée de la fonction B .

Montrer que, pour tout nombre x de l'intervalle $[1 ; 3]$, on a : $B'(x) = -20x + 20 \ln x + 30$.

$$B(x) = -10x^2 + 10x + 20x \cdot \ln x$$

$$(uv)' = u'v + v'u \quad u(x) = 20x \text{ et } v(x) = \ln x \quad \text{donc} \quad u'(x) = 20 \text{ et } v'(x) = \frac{1}{x}$$

$$B'(x) = -20x + 10 + 20 \ln x + 20x \frac{1}{x} = -20x + 10 + 20 \ln x + 20$$

$$\text{donc } B'(x) = -20x + 20 \ln x + 30$$

2. On donne le tableau de variation de la fonction dérivée B' sur l'intervalle $[1 ; 3]$.

x	1	α	3
$B'(x)$	$B'(1)$	0	$B'(3)$

a. Montrer que l'équation $B'(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[1 ; 3]$.

Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} .

La fonction B' est continue et **strictement décroissante** sur $[1 ; 3]$.

L'intervalle image est $[B'(3) ; B'(1)]$. (attention à bien lire l'intervalle image dans le tableau)

Avec $B'(3) = -60 + 20 \ln 3 + 30 = 20 \ln 3 - 30 \approx -8 < 0$ et $B'(1) = -20 + 20 \ln 1 + 30 = 10 > 0$ 0 appartient à l'intervalle image $[B'(3) ; B'(1)]$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $B'(x) = 0$ admet donc une unique solution α dans l'intervalle $[1 ; 3]$.

x	$B'(x)$
2,35	0,09
α	0
2,36	-0,03

$$\text{Donc } 2,35 < \alpha < 2,36$$

2,35 est une valeur approchée (par défaut) de α

b. En déduire le signe de $B'(x)$ sur $[1 ; 3]$ puis dresser le tableau de variation de la fonction B sur cet intervalle. D'après le tableau de variation de la dérivée B' complété par α , on obtient le signe de $B'(x)$

x	1	α	3
$B'(x)$	$B'(1)$	0	$B'(3)$
Signe de $B'(x)$	+	0	-

On déduit le tableau de variation du bénéfice B

x	1	α	3
$B'(x)$	+	0	-
$B(x)$	0	$B(\alpha)$	$B(3)$

$$B(1) = 10 \quad B(3) \approx 5,92$$

$$B(\alpha) \approx B(2,35) \approx 8,4325$$

3. L'artisan a décidé de maintenir sa production dans les mêmes conditions s'il peut atteindre un bénéfice d'au moins 850 euros. Est-ce envisageable ?

850 euros est égal à 8,5 centaines d'euros.

Or, d'après le tableau de variation, le bénéfice est maximum quand $x = \alpha$

$$2,35 < \alpha < 2,36$$

$$B(2,35) \approx 8,4325 < 8,5$$

$$B(2,36) \approx 8,4328 < 8,5$$

Donc il n'est pas envisageable que le bénéfice atteigne 850 euros et poursuive sa production dans les mêmes conditions.

